

SUR UNE CLASSE DE SINGULARITÉS
DANS LE PROBLÈME DE n CORPS

THÈSE POUR LE DOCTORAT

PAR

HENRIK BLOCK

LUND ET BERLIN

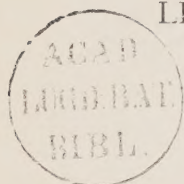
AKTIEBOLAGET SKÅNSKA CENTRALTRYCKERIET
IMPRIMERIE A. W. SCHADE

SUR UNE CLASSE DE SINGULARITÉS DANS LE PROBLÈME DE n CORPS

PAR

HENRIK BLOCK

THÈSE POUR LE DOCTORAT
PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LUND
ET PUBLIQUEMENT SOUTENUE DANS LA SALLE N^o VI
LE 18. SEPTEMBRE 1909 DÈS 10 HEURES DU MATIN



LUND ET BERLIN

AKTIEBOLAGET SKÅNSKA CENTRALTRYCKERIET
IMPRIMERIE A. W. SCHADE

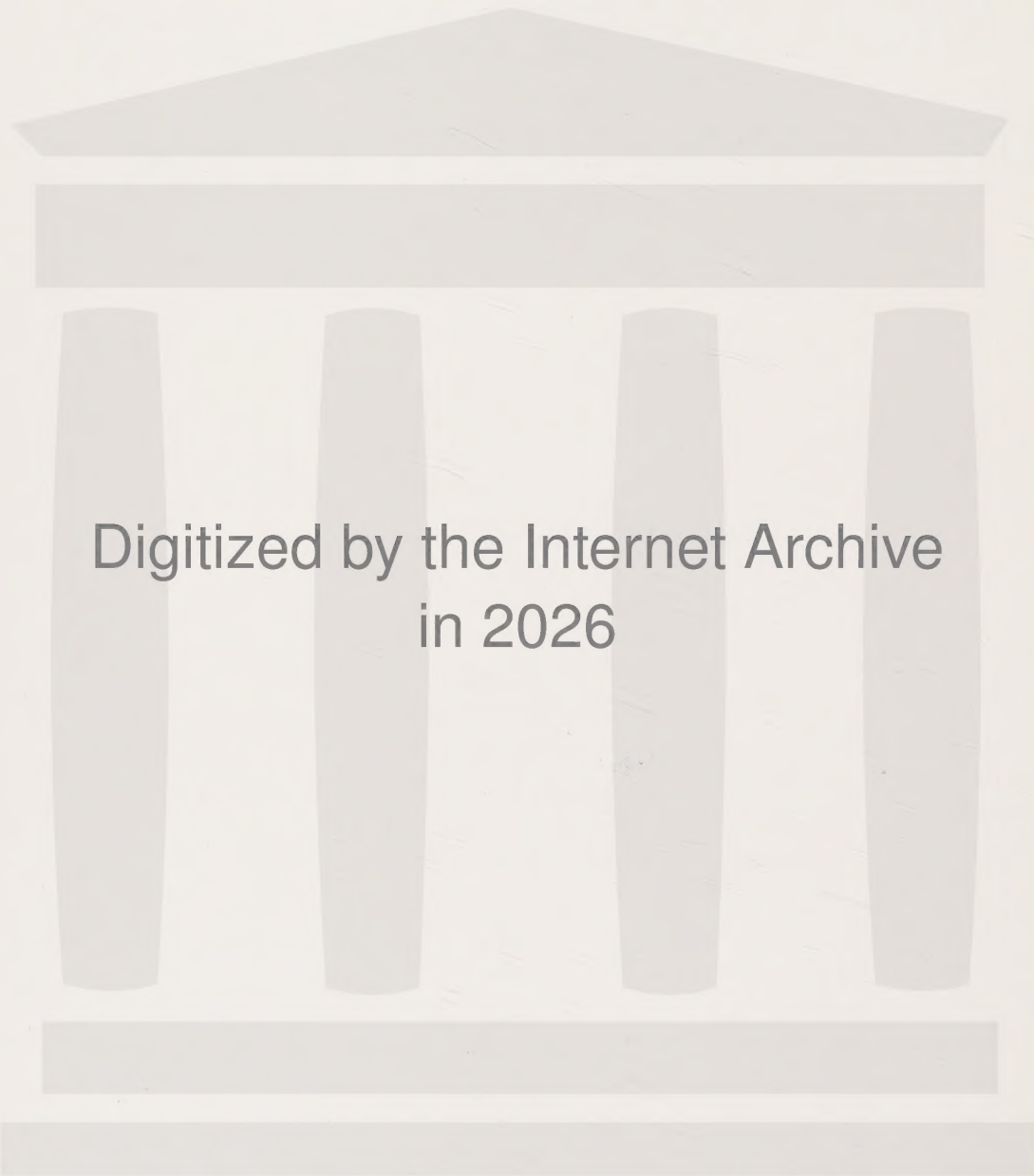
SUR UNE CLASSE DE SINGULARITÉS DANS LE PROBLÈME DE n CORPS

PAR

HENRIK BLOCK



LUND 1909
AKTIEBOLAGET SKÅNSKA CENTRALTRYCKERIET.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553402_0014

Dans le présent travail je me suis proposé d'examiner la nature analytique de certaines singularités dans le problème des trois corps. Un théorème bien connu de M. PAINLEVÉ nous apprend que si à un moment donné la solution du problème des trois corps cesse d'être régulière, deux des corps, ou tous les trois, doivent entrer en collision. Le cas où deux seulement des corps entrent en collision est assez connu par les travaux de MM LEVI-CIVITA¹⁾ et BISCONCINI²⁾. On sait que dans ce cas les coordonnées des trois corps se laissent développer selon les puissances croissantes de $(t_0 - t)^{1/3}$, si t_0 est le moment de la collision³⁾.

Le cas où les trois corps se choquent tous au même moment a été traité dans un mémoire de M. SUNDMAN⁴⁾ qui a déduit des résultats d'une nature géométrique fort intéressants.

Je vais traiter ce cas d'un autre point de vue en m'efforçant surtout de déterminer la nature analytique de la solution. A cet effet je me vois cependant forcé de faire la supposition que les rapports des cordonnées des trois corps comptées de leur centre commun de gravité tendent vers des limites fixes lorsque les corps viennent se choquer. Cette supposition est à un certain degré justifiée par les résultats de M. SUNDMAN qui a démontré que les rapports des distances mutuelles des corps tendent vers des limites fixes.

La méthode employée par moi peut s'étendre sans difficulté au cas où le nombre des corps est supérieur à trois. Tout en insistant surtout sur le cas des trois corps, je vais donc considérer le cas où il y a n corps qui à un moment donné se rencontrent tous dans le même point. Les parties I, II et IV

¹⁾ T. LEVI-CIVITA: Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi, Annali di Matematica, ser. III, T. 9, 1903.

—: Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps. Acta Mathematica, T. 30.

²⁾ G. BISCONCINI: Sur le problème des trois corps, Acta Mathematica, T. 30.

³⁾ Pour le problème des deux corps ce développement a déjà été donné par M. BURRAU. Voir Astronomische Nachrichten, T. 136.

⁴⁾ K. SUNDMAN: Recherches sur le problème des trois corps, Acta Societatis Scientiarum Fennicae, T. XXXIV, N:o 6.

du travail traiteront donc le problème de n corps, tandis que les résultats plus détaillés qu'on peut obtenir au sujet du problème des trois corps sont déduits dans la troisième partie du travail.

Les résultats principaux se trouvent réunis dans la partie V. On y retrouve également une discussion des constantes d'intégration contenues dans les solutions.

La partie VI est presque indépendante du reste du travail. Notre méthode, qui donne pourtant des résultats très précis sur la nature analytique des solutions, n'est pas tout à fait générale puisque nous avons dû faire une hypothèse au sujet des rapports des coordonnées immédiatement avant le choc. Je n'ai pas réussi à démontrer cette hypothèse qui me paraît cependant vraisemblable. Or, en ce qui concerne le problème des trois corps, les résultats de M. SUNDMAN nous apprennent que les rapports des distances mutuelles des corps tendent vers des limites fixes. Ses résultats justifient donc notre hypothèse en ce qui concerne les distances, et voilà pourquoi il y a intérêt à généraliser son procédé au cas où le nombre des corps est supérieur à trois. C'est ce que j'ai essayé de faire brièvement dans la partie VI.

I.

Les équations du mouvement s'écrivent, avec les notations usuelles

$$(1) \quad \begin{cases} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n.)$$

$$(2) \quad U = \sum' \frac{m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Σ' indique une sommation étendue à toutes les combinaisons possibles de i, j , sauf $i = j$.

Supposons l'origine des coordonnées dans le centre de gravité du système des n corps. Nous aurons alors les intégrales suivantes:

$$(3) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n m_i y_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n m_i z_i = 0. \end{cases}$$

Lorsque t tend vers t_0 , le moment de la collision, toutes les coordonnées x_i, y_i, z_i tendent vers zéro. Nous allons maintenant faire la supposition que leurs rapports tendent vers des limites fixes. On pourra donc écrire

$$(4) \quad \begin{cases} x_i = (a_i + \xi_i) \delta, \\ y_i = (b_i + \eta_i) \delta, \\ z_i = (c_i + \zeta_i) \delta, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n.)$$

où a_i, b_i, c_i sont des constantes et ξ_i, η_i, ζ_i ainsi que δ tendent vers zéro lorsque t tend vers t_0 . De même on peut écrire pour les distances mutuelles

$$(4a) \quad r_{ij} = (d_{ij} + \rho_{ij}) \delta; \quad d_{ij}^2 = (a_i - a_j)^2 + (b_i - b_j)^2 + (c_i - c_j)^2,$$

où ρ_{ij} tend vers zéro avec $t_0 - t$.

Envisageons maintenant l'intégrale des forces vives

$$(5) \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = \sum' \frac{m_i m_j}{r_{ij}} + C.$$

Introduisons ici les expressions (4), (4 a) et ne conservons à gauche et à droite que les termes les plus grands. Si nous supposons $\frac{d(\xi_i \delta)}{dt}, \frac{d(\eta_i \delta)}{dt}, \frac{d(\zeta_i \delta)}{dt}$, infiniment petits par rapport à $\frac{d\delta}{dt}$, il vient

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2) \left(\frac{d\delta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{\delta} \sum' \frac{m_i m_j}{d_{ij}},$$

ou bien

$$(6) \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{2k}{\sqrt{\delta}},$$

où k désigne la constante

$$(6a) \quad k = \pm \sqrt{\frac{\sum' \frac{m_i m_j}{d_{ij}}}{2 \sum (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2) m_i}}.$$

S'il est question d'une collision, δ décroît avec t , et il faut prendre le signe négatif du radical; si l'on considère au contraire le cas où les n corps viennent d'être lancés du même point, il faut prendre le signe positif. Peu nous importe, du reste, puisque k n'entrera que par son carré dans les calculs que nous allons faire.

De (6) on déduit par intégration

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{2}{3} \delta^{3/2} &= 2k (t - t_0), \\ \delta &= (3k)^{2/3} (t - t_0)^{2/3}. \end{aligned}$$

De même les équations pour les b_i et pour les c_i nous donnent les rapports de $b_1, b_2 \dots b_n$ et de $c_1, c_2 \dots c_n$, et comme les coefficients de ces équations sont les mêmes que les coefficients des équations (13), nous aurons

$$a_1 : a_2 : \dots : a_n = b_1 : b_2 : \dots : b_n = c_1 : c_2 : \dots : c_n,$$

et en multipliant par τ^2

$$x_1 : x_2 : \dots : x_n = y_1 : y_2 : \dots : y_n = z_1 : z_2 : \dots : z_n.$$

Cela fait voir que les n corps se trouvent dans une ligne droite passant par l'origine.

Supposons maintenant que tous les mineurs du premier ordre de (4) sont égaux à zéro, mais que les mineurs du deuxième ordre ne disparaissent pas tous à la fois. Les a_i peuvent alors s'exprimer au moyen de deux quantités arbitraires α_1 et α_2 :

$$a_i = K_i^{(1)} \alpha_1 + K_i^{(2)} \alpha_2. \quad (i = 1, 2 \dots n.)$$

De même les b_i et les c_i s'expriment au moyen des quantités arbitraires β_1, β_2 et γ_1, γ_2 :

$$\begin{aligned} b_i &= K_i^{(1)} \beta_1 + K_i^{(2)} \beta_2, \\ c_i &= K_i^{(1)} \gamma_1 + K_i^{(2)} \gamma_2. \end{aligned} \quad (i = 1, 2 \dots n.)$$

En éliminant $K_i^{(1)}$ et $K_i^{(2)}$ on obtient

$$\begin{vmatrix} a_i & \alpha_1 & \alpha_2 \\ b_i & \beta_1 & \beta_2 \\ c_i & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

En multipliant par τ^2 et en développant le déterminant on obtient une relation de la forme

$$Ax_i + By_i + Cz_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

ce qui fait voir que les n corps se trouvent dans un plan fixe contenant l'origine.

La condition que tous les mineurs du premier ordre de (14) doivent disparaître peut s'exprimer par une seule équation. On remarque en effet l'analogie de l'équation (14) à l'équation en s qu'on rencontre dans la théorie de la réduction d'une forme quadratique à une somme de carrés. Il y a la différence que cette dernière équation est symétrique, ce qui n'est pas le cas du déterminant (14). On peut cependant le rendre symétrique en multipliant les lignes par $\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \dots, \sqrt{m_n}$ respectivement et en divisant en même temps les colonnes par $\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \dots, \sqrt{m_n}$ respectivement. On peut alors faire usage

de la théorie mentionnée tout à l'heure.¹⁾ Pour que tous les mineurs du premier ordre disparaissent, il faut donc et il suffit que l'équation (14), considérée comme une équation en $2k^2$, ait une racine double. La dérivée du premier ordre de (14) par rapport à $2k^2$ doit donc disparaître en même temps que (14). C'est là la condition cherchée.

Après ces considérations générales je passe à la détermination effective des quantités a_i, b_i, c_i . Traitons d'abord le cas de trois corps. Le déterminant (14) est alors du troisième ordre. Les mineurs du deuxième ordre ne peuvent donc jamais disparaître, et nous n'avons que deux cas à distinguer: le mouvement en ligne droite et le mouvement dans un plan.

Si le mouvement a lieu en ligne droite, nous prenons cette ligne pour l'axe des x . On aura alors

$$b_1 = b_2 = b_3 = c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Supposons que les trois corps se suivent dans l'ordre m_3, m_2, m_1 quand on va sur l'axe des x dans la direction positive. Les autres cas s'en déduisent par une simple permutation des indices. En ce cas on aura

$$a_1 - a_2 = d_{12}, \quad a_2 - a_3 = d_{23}, \quad a_1 - a_3 = d_{13} = d_{12} + d_{23}.$$

Formons les différences des équations (12); nous obtiendrons

$$\begin{aligned} 2k^2 d_{12} &= \frac{m_1 + m_2}{d_{12}^3} + m_3 \left(\frac{1}{(d_{12} + d_{23})^2} - \frac{1}{d_{23}^2} \right), \\ 2k^2 d_{23} &= \frac{m_2 + m_3}{d_{23}^3} + m_1 \left(\frac{1}{(d_{12} + d_{23})^2} - \frac{1}{d_{12}^2} \right). \end{aligned}$$

Comme le montre l'équation (6 a), la constante k^2 est homogène du degré -3 par rapport aux a_i, b_i, c_i . Afin de simplifier nos calculs nous fixons cette constante de manière à rendre

$$d_{23} = 1.$$

Posons en outre

$$d_{12} = \chi.$$

Les équations deviennent

$$(15) \quad \begin{cases} 2k^2 \chi = \frac{m_1 + m_2}{\chi^2} + \frac{m_3}{(1 + \chi)^2} - m_3, \\ 2k^2 = m_2 + m_3 + \frac{m_1}{(1 + \chi)^2} - \frac{m_1}{\chi^2}. \end{cases}$$

En éliminant k^2 entre ces deux équations nous obtenons une équation pour la détermination de χ . Après quelques simplifications elle devient

¹⁾ Voir p. e. CHARLIER, Die Mechanik des Himmels, Band I, Abt. 1.

$$(16) \quad (m_2 + m_3) \chi^5 + (2 m_2 + 3 m_3) \chi^4 + (m_2 + 3 m_3) \chi^3 - \\ - (3 m_1 + m_2) \chi^2 - (3 m_1 + 2 m_2) \chi - (m_1 + m_2) = 0.$$

Puis la seconde équation (15) nous donne l'expression de $2 k^2$. Au moyen de l'équation (16) cette expression peut être mise sous la forme

$$(17) \quad 2 k^2 = \frac{1}{\chi^2 (1 + \chi)^3} (m_2 \chi^4 + 2 m_2 \chi^3 + (m_1 + 2 m_2 + m_3) \chi^2 + 2 m_2 \chi + m_2).$$

Il convient de réunir ici les expressions des quantités a_i , b_i , c_i en fonction de χ . Les voici :

$$(18) \quad \begin{cases} a_1 - a_2 = \chi, & a_1 - a_3 = 1 + \chi, & a_2 - a_3 = 1, \\ b_1 = b_2 = b_3 = 0 = c_1 = c_2 = c_3. \end{cases}$$

Passons à l'autre cas, celui où les trois corps se meuvent dans un plan. Prenons ce plan pour le plan des xy ; nous aurons alors

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Posons dans ce cas

$$(19) \quad 2 k^2 = M = m_1 + m_2 + m_3.$$

Tous les mineurs du déterminant (14) doivent disparaître, ce qui nous apprend que les trois équations (13) doivent se réduire à une seule. Or en additionnant ces équations après les avoir multipliées par m_1, m_2, m_3 respectivement, on obtient

$$2 k^2 (m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3) = 0,$$

ce qui n'est autre chose que la première intégrale du centre de gravité. Tous les équations (13) doivent donc se réduire à cette équation. Si k^2 est déterminé par (19), cela exige

$$d_{12}^3 = d_{13}^3 = d_{23}^3 = 1,$$

c'est à dire

$$d_{12} = d_{13} = d_{23} = 1,$$

puisque nous ne considérons que le cas réel. En se rappelant la signification des quantités d_{12}, d_{13}, d_{23} on voit que les trois corps forment un triangle équilatéral.

Pour la détermination des six quantités $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ nous avons les équations

$$\begin{aligned} m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 &= 0, \\ m_1 b_1 + m_2 b_2 + m_3 b_3 &= 0, \\ (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 &= 1, \\ (a_1 - a_3)^2 + (b_1 - b_3)^2 &= 1, \\ (a_2 - a_3)^2 + (b_2 - b_3)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Il n'y a donc que cinq équations. Une des six inconnues peut par conséquent être choisie arbitrairement, ce qu'on pouvait d'ailleurs prévoir, puisque le triangle formé par les trois corps peut avoir une orientation quelconque par rapport aux axes des coordonnées. Dans ce qui va suivre, nous n'avons besoin que des différences de $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. On les obtient au moyen des trois dernières équations. Une des inconnues peut être choisie arbitrairement; prenons par exemple $b_1 - b_2 = 1$. On trouve alors sans difficulté le système suivant de valeurs

$$(20) \quad \begin{cases} a_1 - a_2 = 0, & b_1 - b_2 = 1, \\ a_1 - a_3 = +\frac{\sqrt{3}}{2}, & b_1 - b_3 = +\frac{1}{2}, \\ a_2 - a_3 = +\frac{\sqrt{3}}{2}, & b_2 - b_3 = -\frac{1}{2}, \\ c_1 = c_2 = c_3 = 0. \end{cases}$$

On voit que les solutions que nous venons de trouver ne sont autre chose que certaines des solutions exactes découvertes par LAGRANGE.

Je dirai quelques mots aussi du cas $n = 4$. C'est le problème des quatre corps. Dans ce cas le déterminant (14) est du quatrième ordre. Trois cas peuvent se présenter:

1:0. Les mineurs du premier ordre de (14) ne sont pas tous nuls. C'est le cas du mouvement en ligne droite.

2:0. Les mineurs du premier ordre disparaissent tous, mais il n'en est pas de même des mineurs du second ordre. Le mouvement est alors plan.

3:0. Tous les mineurs du second ordre disparaissent. Le mouvement a lieu dans trois dimensions.

Le premier cas se traite comme le cas correspondant dans le problème des trois corps. Supposons que les quatre corps se suivent dans l'ordre m_4, m_3, m_2, m_1 sur la ligne droite. Prenons les différences des équations (12); nous trouvons

$$\begin{aligned} 2 k^2 d_{12} &= \frac{m_1 + m_2}{d_{12}^2} + m_3 \left(\frac{1}{d_{13}^2} - \frac{1}{d_{23}^2} \right) + m_4 \left(\frac{1}{d_{14}^2} - \frac{1}{d_{24}^2} \right), \\ 2 k^2 d_{23} &= m_1 \left(\frac{1}{d_{13}^2} - \frac{1}{d_{12}^2} \right) + \frac{m_2 + m_3}{d_{23}^2} + m_4 \left(\frac{1}{d_{24}^2} - \frac{1}{d_{34}^2} \right), \\ 2 k^2 d_{34} &= m_1 \left(\frac{1}{d_{14}^2} - \frac{1}{d_{13}^2} \right) + m_2 \left(\frac{1}{d_{24}^2} - \frac{1}{d_{23}^2} \right) + \frac{m_3 + m_4}{d_{34}^2}. \end{aligned}$$

Déterminons ici k^2 de manière à avoir $d_{23} = 1$, et posons

$$d_{12} = \chi, \quad d_{34} = \phi.$$

On trouve sans peine les équations suivantes qui détermineront χ et ψ :

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} -m_3 - (m_2 + m_3)\chi + \frac{m_1 + m_2 + m_1\chi}{\chi^2} + \frac{m_3 - m_1\chi}{(1 + \chi)^2} + \\ \quad + m_4 \left(\frac{\chi}{\psi^2} - \frac{1 + \chi}{(1 + \psi)^2} + \frac{1}{(1 + \chi + \psi)^2} \right) = 0, \\ -m_2 - (m_2 + m_3)\psi + \frac{m_3 + m_4 + m_4\psi}{\psi^2} + \frac{m_2 - m_4\psi}{(1 + \psi)^2} + \\ \quad + m_1 \left(\frac{\psi}{\chi^2} - \frac{1 + \psi}{(1 + \chi)^2} + \frac{1}{(1 + \chi + \psi)^2} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Introduisons les notations

$$\begin{aligned} f_1(\chi) &= -m_3 - (m_2 + m_3)\chi + \frac{m_1 + m_2 + m_1\chi}{\chi^2} + \frac{m_3 - m_1\chi}{(1 + \chi)^2}, \\ &= -\frac{1}{\chi^2(1 + \chi)^2} [(m_2 + m_3)\chi^5 + (2m_2 + 3m_3)\chi^4 + (m_2 + 3m_3)\chi^3 - \\ &\quad - (3m_1 + m_2)\chi^2 - (3m_1 + 2m_2)\chi - (m_1 + m_2)]; \\ f_2(\psi) &= -m_2 - (m_2 + m_3)\psi + \frac{m_3 + m_4 + m_4\psi}{\psi^2} + \frac{m_2 - m_4\psi}{(1 + \psi)^2}, \\ &= -\frac{1}{\psi^2(1 + \psi)^2} [(m_2 + m_3)\psi^5 + (3m_2 + 2m_3)\psi^4 + (3m_2 + m_3)\psi^3 - \\ &\quad - (m_3 + 3m_4)\psi^2 - (2m_3 + 3m_4)\psi - (m_3 + m_4)]; \\ g(\chi, \psi) &= \frac{\chi}{\psi^2} - \frac{1 + \chi}{(1 + \psi)^2} + \frac{1}{(1 + \chi + \psi)^2}, \\ &= \chi(1 + \chi) \frac{1 + \chi + 4\psi + 2\chi\psi + 3\psi^2}{\psi^2(1 + \psi)^2(1 + \chi + \psi)^2}. \end{aligned}$$

Les équations (21) peuvent alors s'écrire

$$(21a) \quad \begin{cases} f_1(\chi) + m_4 g(\chi, \psi) = A(\chi, \psi) = 0, \\ f_2(\psi) + m_1 g(\psi, \chi) = B(\chi, \psi) = 0. \end{cases}$$

Je dis qu'il y a toujours un système de valeurs positives χ, ψ satisfaisant à ces équations. Considérons χ, ψ comme des coordonnées rectilignes dans un plan. Les équations $A=0$ et $B=0$ représentent alors deux courbes. S'il y a des racines positives du système (21 a), ces deux courbes doivent se couper dans le premier quadrant. Je vais prouver qu'il en est ainsi.

$A(\chi, \psi)$ se compose de deux termes. Le premier $f_1(\chi)$ est égal à $+\infty$ pour $\chi=0$ et à $-\infty$ pour $\chi=+\infty$. Pour des valeurs positives et finies de χ , $f_1(\chi)$ est fini. $f_1(\chi)$ disparaît pour une valeur positive de χ et une seule. En effet, $f_1(\chi)$ n'est autre chose que $-\frac{1}{\chi^2(1 + \chi)^2}$ multiplié par le membre gauche

de l'équation (16), et il est bien connu que cette équation qui ne présente qu'une variation de signe, n'a qu'une racine positive. Appelons χ_0 cette racine. Donc $f_1(\chi)$ est positif pour $0 < \chi < \chi_0$ et négatif pour $\chi_0 < \chi < +\infty$. La deuxième expression de $g(\chi, \psi)$ montre d'autre part que $g(\chi, \psi)$ est toujours positif pour $\chi > 0, \psi > 0$. Pour $0 < \chi < \chi_0$, $A(\chi, \psi)$ est par conséquent la somme de deux quantités positives et ne peut donc pas disparaître. Si au contraire χ est plus grand que χ_0 , il y a toujours une valeur de ψ et une seule qui fait disparaître $A(\chi, \psi)$. Pour une telle valeur de χ , $f_1(\chi)$ est en effet égal à une certaine valeur finie $-c$. Or en développant l'équation $g(\chi, \psi) - c = 0$ on trouve une équation en ψ ne présentant qu'une variation de signe. Cette équation a donc une racine positive et une seule.

Si χ est égal à χ_0 , $f_1(\chi)$ disparaît et il faut avoir $g(\chi_0, \psi) = 0$, ce qui donne $\psi = \infty$. La courbe $A = 0$ admet donc la droite $\chi = \chi_0$ comme asymptote.

Quelle est la forme de la courbe $A = 0$ pour χ très grand? Les termes les plus grands dans A sont alors

$$\chi \left(\frac{m_4}{\psi^2} - \frac{m_4}{(1+\psi)^2} - (m_2 + m_3) \right).$$

Le coefficient de χ doit disparaître, ce qui donne

$$h(\psi) = (m_2 + m_3)\psi^4 + 2(m_2 + m_3)\psi^3 + (m_2 + m_3)\psi^2 - 2m_4\psi - m_4 = 0.$$

Cette équation a une racine positive ψ_1 et une seule. La courbe aura la droite $\psi = \psi_1$ comme asymptote.

Je dis que ψ_1 est inférieur à la racine ψ_0 de l'équation $f_2(\psi) = 0$. Pour $\psi = 0$, $h(\psi)$ est négatif, et il suffit donc de prouver que $h(\psi_0)$ est positif pour savoir que la racine ψ_1 est comprise entre ψ_0 et 0. $h(\psi)$ a le même signe que $(1 + \psi)h(\psi)$. Or en observant que

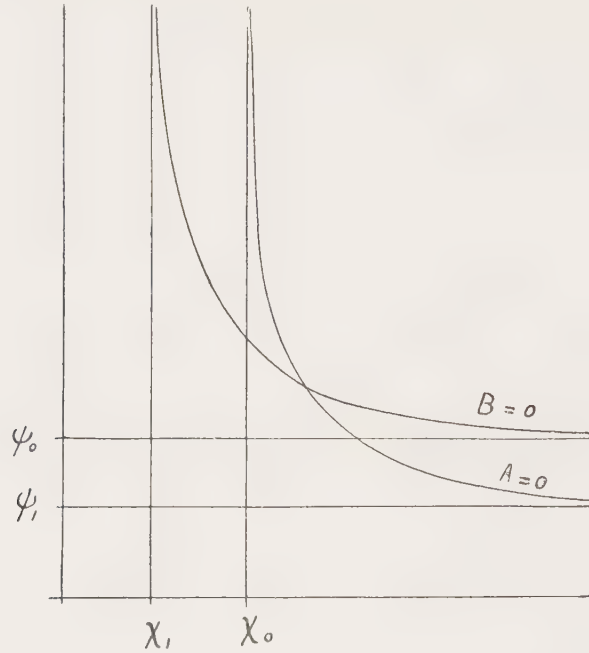
$$(m_2 + m_3)\psi_0^5 + (3m_2 + 2m_3)\psi_0^4 + (3m_2 + m_3)\psi_0^3 - (m_3 + 3m_4)\psi_0^2 - (2m_3 + 3m_4)\psi_0 - (m_3 + m_4) = 0,$$

on trouve

$$(1 + \psi_0)h(\psi_0) = m_3\psi_0^4 + 2m_3\psi_0^3 + (m_2 + 2m_3 + m_4)\psi_0^2 + 2m_3\psi_0 + m_3.$$

C'est là une quantité essentiellement positive, et notre assertion se trouve ainsi démontrée.

Nous pouvons maintenant tracer la courbe $A = 0$ qui aura la forme générale indiquée dans la figure.



Un examen tout à fait analogue nous donne la forme de la courbe $B = 0$. Cette courbe aura les deux asymptotes $\psi = \psi_0$ et $\chi = \chi_1$, et on aura $\chi_1 < \chi_0$. On en conclut la forme indiquée dans la figure.

Il est évident que les deux courbes doivent nécessairement se couper. Si nous appelons χ et ψ les coordonnées du point de l'intersection, χ et ψ satisferont au système (21), et nous aurons manifestement

$$\chi > \chi_0, \quad \psi > \psi_0.$$

Le cas du mouvement dans un plan est plus compliqué, et je vais en considérer seulement quelques cas spéciaux. En premier lieu, si les quatre masses sont égales entre elles, il y a une solution évidente: c'est celle où les quatre corps forment un carré. Si l'on pose en effet

$$d_{12} = d_{23} = d_{34} = d_{14} = 1, \quad d_{13} = d_{24} = \sqrt{2},$$

$$2k^2 = m \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad m = m_1 = m_2 = m_3 = m_4,$$

le déterminant (14) devient, abstraction faite du facteur m ,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}}, & 1, & \frac{1}{2\sqrt{2}}, & 1 \\ 1, & \frac{1}{2\sqrt{2}}, & 1, & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}, & 1, & \frac{1}{2\sqrt{2}}, & 1 \\ 1, & \frac{1}{2\sqrt{2}}, & 1, & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

Dans les mineurs du premier ordre, deux lignes sont toujours égales entre elles (et deux colonnes aussi du reste). Ces mineurs sont donc tous nuls, mais on voit tout de suite qu'il n'en est pas de même des mineurs du deuxième ordre.

Le carré n'est cependant pas la seule solution possible dans ce cas. En effet, si trois des masses sont égales entre elles, une configuration possible est celle où les trois masses égales occupent les sommets d'un triangle équilatéral, tandis que la quatrième masse en occupe le centre de gravité. C'est ce qu'on vérifie aisément en posant dans le déterminant (14)

$$d_{12} = d_{13} = d_{23} = 1, \quad d_{14} = d_{24} = d_{34} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$2k^2 = 3m + 3\sqrt{3}m_4, \quad m_1 = m_2 = m_3 = m.$$

On obtient alors

$$\begin{vmatrix} m, & m, & m, & 3\sqrt{3}m_4 \\ m, & m, & m, & 3\sqrt{3}m_4 \\ m, & m, & m, & 3\sqrt{3}m_4 \\ 3\sqrt{3}m, & 3\sqrt{3}m, & 3\sqrt{3}m, & 3m(1-3\sqrt{3}) + 3\sqrt{3}m_4 \end{vmatrix}$$

et tous les mineurs du premier ordre de ce déterminant sont évidemment égaux à zéro.

Si la masse m_4 est infiniment petite, elle n'aura aucune influence sur le mouvement des trois autres. Celles-ci se rangeront donc soit en ligne droite, soit en triangle équilatéral, et la position de la quatrième masse sera déterminée par la dernière équation (13) et par l'équation correspondante en b_i , c'est à dire par

$$\frac{a_1 m_1}{d_{14}^3} + \frac{a_2 m_2}{d_{24}^3} + \frac{a_3 m_3}{d_{34}^3} + a_4 \left(2k^2 - \frac{m_1}{d_{14}^3} - \frac{m_2}{d_{24}^3} - \frac{m_3}{d_{34}^3} \right) = 0,$$

$$\frac{b_1 m_1}{d_{14}^3} + \frac{b_2 m_2}{d_{24}^3} + \frac{b_3 m_3}{d_{34}^3} + b_4 \left(2k^2 - \frac{m_1}{d_{14}^3} - \frac{m_2}{d_{24}^3} - \frac{m_3}{d_{34}^3} \right) = 0.$$

Si nous introduisons ici les expressions en a_4 et b_4 de d_{14} , d_{24} , d_{34} , nous aurons deux équations pour la détermination des deux inconnues a_4 et b_4 .

Si les trois masses m_1 , m_2 , m_3 se trouvent en ligne droite, il y a des solutions que nous connaissons déjà; ce sont celles où la quatrième masse se range en ligne droite avec les trois premières. Tâchons d'éliminer ces solutions. Si nous prenons pour l'axe des x la ligne par les trois corps m_1 , m_2 , m_3 , nous avons $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. La deuxième équation donne alors ou bien $b_4 = 0$, ce qui est le cas du mouvement en ligne droite, ou bien

$$2k^2 - \frac{m_1}{d_{14}^3} - \frac{m_2}{d_{24}^3} - \frac{m_3}{d_{34}^3} = 0.$$

Introduisons cette égalité dans la première équation; nous aurons

$$\frac{a_1 m_1}{d_{14}^3} + \frac{a_2 m_2}{d_{24}^3} + \frac{a_3 m_3}{d_{34}^3} = 0.$$

Ces deux équations ne contiennent a_4 et b_4 que par l'intermédiaire des quantités d_{14} , d_{24} , d_{34} . Si l'on veut, on peut les employer pour la détermination de d_{14} , d_{24} , d_{34} , mais il faut alors y joindre une troisième équation qu'on obtient en éliminant a_4 et b_4 entre les expressions de d_{14} , d_{24} , d_{34} . On peut aussi obtenir cette équation en exprimant que la somme des angles $m_1 m_2 m_4$ et $m_3 m_2 m_4$ est égale à 180° . Appelons v le premier angle; le deuxième sera $180^\circ - v$. Or nous avons

$$\begin{aligned} r_{14}^2 &= r_{12}^2 + r_{24}^2 - 2 r_{12} r_{24} \cos v, \\ r_{34}^2 &= r_{23}^2 + r_{24}^2 + 2 r_{23} r_{24} \cos v. \end{aligned}$$

Divisons par r_{24}^4 , puis éliminons v ; nous aurons

$$\frac{d_{14}^2}{d_{12}^2} + \frac{d_{34}^2}{d_{23}^2} = \frac{d_{12}^2 + d_{24}^2}{d_{12}^2} + \frac{d_{23}^2 + d_{24}^2}{d_{23}^2},$$

Or nous avons $d_{23} = 1$, $d_{12} = \chi$, si χ est la racine de l'équation (16). Nous avons donc enfin

$$d_{14}^2 + \chi d_{34}^2 = (1 + \chi) d_{24}^2 + \chi + \chi^2,$$

ce qui est la troisième équation cherchée.

Dans le cas spécial $m_1 = m_3$, ces équations se simplifient davantage. On a alors $\chi = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$. La deuxième équation nous donne $d_{14} = d_{34}$, et la première équation devient

$$2k^2 - \frac{2m_1}{d_{14}^3} - \frac{m_2}{d_{24}^3} = 0.$$

Introduisons ici la valeur de d_{14} tirée de la troisième équation qui devient tout simplement

$$d_{14}^2 = 1 + d_{24}^2.$$

Nous aurons

$$2k^2 - \frac{2m_1}{(1 + d_{24}^2)^{3/2}} - \frac{m_2}{d_{24}^3} = 0.$$

Cette équation aura toujours une racine positive. Le membre gauche, qui est fini et continu pour $d_{24} > 0$, est en effet négatif pour d_{24} très petit et positif pour d_{24} très grand. Il doit donc y avoir une racine positive.

Le cas du mouvement en trois dimensions est le cas le plus simple. Posons $2k^2 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$. Pour que tous les mineurs du déterminant (14) soient égaux à zéro, il faut que

$$d_{12} = d_{13} = d_{14} = d_{23} = d_{24} = d_{34} = 1.$$

Les quatre corps se trouveront aux sommets d'un tétraèdre.

II.

Les constantes a_i, b_i, c_i étant ainsi déterminées, nous passons à la détermination des fonctions ξ_i, η_i, ζ_i . Substituons donc dans les équations différentielles (9) les expressions

$$(23) \quad \begin{cases} x_i = (a_i + \xi_i) \tau^2, \\ y_i = (b_i + \eta_i) \tau^2, \\ z_i = (c_i + \zeta_i) \tau^2. \end{cases} \quad (i = 1, 2 \dots n.)$$

Nous aurons

$$(24) \quad \begin{cases} k^2 m_i \left(\tau^2 \frac{d^2 \xi_i}{d\tau^2} + 2\tau \frac{d\xi_i}{d\tau} - 2(a_i + \xi_i) \right) = \tau^4 \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial \xi_i}, \\ k^2 m_i \left(\tau^2 \frac{d^2 \eta_i}{d\tau^2} + 2\tau \frac{d\eta_i}{d\tau} - 2(b_i + \eta_i) \right) = \tau^4 \frac{\partial U}{\partial y_i} = \frac{\partial V}{\partial \eta_i}, \\ k^2 m_i \left(\tau^2 \frac{d^2 \zeta_i}{d\tau^2} + 2\tau \frac{d\zeta_i}{d\tau} - 2(c_i + \zeta_i) \right) = \tau^4 \frac{\partial U}{\partial z_i} = \frac{\partial V}{\partial \zeta_i}. \end{cases} \quad (i = 1, 2 \dots n.)$$

Ici V est défini par

$$V = \tau^2 U.$$

La fonction V et ses dérivées partielles se laissent développer en séries de puissances des ξ_i , η_i , ζ_i , et ces séries convergent, si les valeurs absolues des ξ_i , η_i , ζ_i sont assez petites:

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_i} = \frac{\partial V}{\partial a_i} + \xi_1 \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a_1} + \dots + \eta_1 \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial b_1} + \dots + \zeta_1 \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial c_1} + \dots,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta_i} = \frac{\partial V}{\partial b_i} + \xi_1 \frac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial a_1} + \dots + \eta_1 \frac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial b_1} + \dots + \zeta_1 \frac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial c_1} + \dots,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \zeta_i} = \frac{\partial V}{\partial c_i} + \xi_1 \frac{\partial^2 V}{\partial c_i \partial a_1} + \dots + \eta_1 \frac{\partial^2 V}{\partial c_i \partial b_1} + \dots + \zeta_1 \frac{\partial^2 V}{\partial c_i \partial c_1} + \dots$$

Substituons ces expressions dans les équations (24) et observons que les constantes a_i , b_i , c_i ont été déterminées de manière que

$$-2k^2 m_i a_i = \frac{\partial V}{\partial a_i},$$

$$-2k^2 m_i b_i = \frac{\partial V}{\partial b_i},$$

$$-2k^2 m_i c_i = \frac{\partial V}{\partial c_i}.$$

Nous aurons

$$(25) \left\{ \begin{aligned} k^2 m_i \left(\tau^2 \frac{d^2 \xi_i}{d\tau^2} + 2\tau \frac{d\xi_i}{d\tau} - 2\xi_i \right) &= \xi_1 \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a_1} + \dots + \eta_1 \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial b_1} + \dots + \zeta_1 \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial c_1} + \dots, \\ k^2 m_i \left(\tau^2 \frac{d^2 \eta_i}{d\tau^2} + 2\tau \frac{d\eta_i}{d\tau} - 2\eta_i \right) &= \xi_1 \frac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial a_1} + \dots + \eta_1 \frac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial b_1} + \dots + \zeta_1 \frac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial c_1} + \dots, \\ k^2 m_i \left(\tau^2 \frac{d^2 \zeta_i}{d\tau^2} + 2\tau \frac{d\zeta_i}{d\tau} - 2\zeta_i \right) &= \xi_1 \frac{\partial^2 V}{\partial c_i \partial a_1} + \dots + \eta_1 \frac{\partial^2 V}{\partial c_i \partial b_1} + \dots + \zeta_1 \frac{\partial^2 V}{\partial c_i \partial c_1} + \dots, \end{aligned} \right.$$

Posons

$$\xi_i = u_i, \quad \eta_i = u_{n+i}, \quad \zeta_i = u_{2n+i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Introduisons de plus, pour abréger, la notation symbolique

$$(26) \quad D(u) = \tau^2 \frac{d^2 u}{d\tau^2} + 2\tau \frac{du}{d\tau} - 2u.$$

Nous avons alors affaire à un système d'équations différentielles du type suivant:

les éléments α_{ij} du déterminant (29) seront donnés par

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a_j}.$$

A cause du facteur $\frac{1}{m_i}$, le déterminant n'est pas symétrique, mais il est facile de le rendre symétrique par un changement des variables. Prenons en effet dans (27) pour nouvelles variables indépendantes les quantités $V_{m_1} u_1, V_{m_2} u_2, \dots$. Le déterminant sera alors symétrique, ce qu'on vérifie sans difficulté. On peut donc appliquer les propositions relatives au cas symétrique, ce qui nous permet d'affirmer que tous les s_i sont réels et que la réduction à la forme (28) est toujours possible, même si deux des quantités s_i sont égales entre elles.

Le déterminant (29) est de l'ordre $3n$. Les intégrales du centre de gravité nous permettent cependant d'en réduire l'ordre de trois unités. Même dans ce cas on peut s'arranger de manière à avoir une équation en s symétrique. A cet effet, nous faisons usage des coordonnées rectilignes indiquées par JACOBI. Soient $x'_1, y'_1, z'_1, \dots, x'_{n-1}, y'_{n-1}, z'_{n-1}$ ces coordonnées. On sait que les équations du mouvement sont de la forme

$$\mu_i \frac{d^2 x'_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x'_i}, \quad \mu_i \frac{d^2 y'_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y'_i}, \quad \mu_i \frac{d^2 z'_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z'_i}. \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

Posons ici

$$x'_i = (a'_i + \xi'_i) \tau^2, \quad y'_i = (b'_i + \eta'_i) \tau^2, \quad z'_i = (c'_i + \zeta'_i) \tau^2.$$

Puis procédons exactement comme ci-dessus. Pour la détermination des constantes a'_i, b'_i, c'_i nous aurons certaines équations finies, et les quantités $\xi'_i, \eta'_i, \zeta'_i$ seront déterminées par des équations analogues à (27). Si nous prenons ici $V_{\mu_i} \xi'_i, V_{\mu_i} \eta'_i, V_{\mu_i} \zeta'_i$ comme nouvelles variables avant de faire la réduction à la forme (28), nous aurons un déterminant (29) de l'ordre $3(n-1)$ *symétrique*.

Les remarques que je viens de faire démontrent que la réduction à la forme (28) est toujours possible. Ce point bien établi, on est libre de faire cette réduction de la manière la plus simple. En effectuant les calculs nous ne ferons donc pas usage des coordonnées de JACOBI.

Nous avons donc à étudier la solution du système (28) au voisinage de $\tau = 0$. Pour ce point, il faut avoir $v_1 = v_2 = \dots = 0$. Négligeons d'abord les termes du degré supérieur dans (28); nous aurons des équations de la forme

$$(30) \quad \tau^2 \frac{d^2 v_i}{d\tau^2} + 2\tau \frac{dv_i}{d\tau} - \left(2 + \frac{s_i}{k^2}\right) v_i = 0. \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

La solution générale de (30) est

$$(31) \quad v_i = A_i \tau^{\mu_i} + B_i \tau^{\nu_i}.$$

Ici A_i et B_i sont les constantes d'intégration, et μ_i, ν_i sont les deux racines de l'équation

$$(31a) \quad \mu^2 + \mu - \left(2 + \frac{s_i}{k^2}\right) = 0.$$

Comme nous l'avons démontré, tous les s_i sont réels. μ_i, ν_i sont donc ou bien réels, ou bien des quantités imaginaires conjuguées. Dans ce dernier cas, leur partie réelle est égale à $-\frac{1}{2}$, puisque leur somme est toujours égale à -1 .

Nous devons avoir $v_i = 0$ pour $\tau = 0$. Si μ_i et ν_i sont imaginaires, leurs parties réelles sont négatives, et l'expression (31) ne devient pas égale à zéro. Dans ce cas il faut donc avoir

$$A_i = B_i = 0.$$

Si μ_i et ν_i sont réels, un au moins d'entre eux doit être négatif. Supposons que ce soit ν_i . Pour que l'expression (31) tende vers zéro, il faut alors avoir $B_i = 0$, et nous avons

$$(32) \quad v_i = A_i \tau^{\mu_i}.$$

Supposons que les exposants $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_p$ seulement sont essentiellement positifs ($p \leq m$). L'expression (32) est alors valable pour $i = 1, 2 \dots p$, tandis que, pour $i = p + 1, \dots m$, on doit avoir

$$(32a) \quad v_i = 0.$$

Revenons maintenant aux équations (28) et cherchons à y satisfaire par des séries de la forme

$$(33) \quad \begin{cases} v_i = A_i \tau^{\mu_i} + \sum_{x_1, x_2, \dots, x_p} \alpha_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)} \tau^{x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 + \dots + x_p \mu_p} & (i = 1, 2 \dots p) \\ v_i = \sum_{x_1, x_2, \dots, x_p} \alpha_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)} \tau^{x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 + \dots + x_p \mu_p} & (i = p + 1 \dots m) \end{cases}$$

Dans ces formules, Σ désigne une sommation étendue à toutes les valeurs entières positives ou nulles de $x_1, x_2 \dots x_p$ satisfaisant à l'inégalité

$$(34) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_p \geq 2.$$

Substituons les séries (33) dans les équations (28). Nous ordonnons selon les puissances de τ et nous aurons pour les F_i des séries de la forme

$$F_i = \sum_{x_1, x_2, \dots, x_p} \beta_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)} \tau^{x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 + \dots + x_p \mu_p} \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

la sommation étant étendue aux mêmes valeurs de $x_1, x_2 \dots x_p$ que tout à l'heure. Les coefficients β se forment des A et des α par des opérations d'addition et de multiplication. Le coefficient $\beta_{x_1, x_2 \dots x_p}$ contient outre les A seulement des coefficients $\alpha_{\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_p}$ pour lesquels l'inégalité

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p < x_1 + x_2 + \dots + x_p$$

a lieu.

Ceci posé, nous pouvons établir des formules de récursion pour les α . En égalant les coefficients des puissances semblables de τ on obtient en effet

$$(35) \quad \{ k^2 ([x \mu]^2 + [x \mu] - 2) - s_i \} \alpha_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)} = \beta_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)} \quad (i = 1, 2 \dots m).$$

Ici $[x \mu]$ désigne l'exposant de τ :

$$[x \mu] = x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 + \dots + x_p \mu_p.$$

Les équations (35) nous permettent de calculer les coefficients α par recurrence, à condition que les expressions

$$(36) \quad k^2 ([x \mu]^2 + [x \mu] - 2) - s_i \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

ne deviennent jamais égales à zéro. Or ces expressions disparaissent pour

$$[x \mu] = \mu_i \text{ et } [x \mu] = \nu_i,$$

et pour ces valeurs seulement. Or les ν_i sont tous négatifs (ou ont du moins des parties réelles négatives), tandis que $[x \mu]$ est positif. Le seul cas d'exception possible est donc

$$(37) \quad [x \mu] = x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 + \dots + x_p \mu_p = \mu_i. \quad (i = 1, 2 \dots p).$$

On se rappelle que les nombres entiers $x_1, x_2 \dots x_p$ doivent satisfaire aux conditions

$$x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_p > 0; \\ x_1 + x_2 + \dots + x_p > 2.$$

Supposons donc d'abord que l'équation (37) est toujours irréalisable, c'est à dire qu'aucun des exposants positifs $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_p$ ne peut s'exprimer en fonction linéaire des autres avec des coefficients entiers positifs dont la somme soit au moins égale à deux. Les valeurs absolues des facteurs de $\alpha_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}$ dans (35) admettent alors un minimum différent de zéro, et on peut calculer successivement tous les coefficients α sans y être jamais arrêté. Quant aux coefficients $A_1, A_2 \dots A_p$, ils restent arbitraires et représentent les constantes d'intégration.

Nous avons donc établi l'existence des séries de la forme (33) qui satisfont formellement aux équations différentielles (28). Il reste à en prouver la conver-

gence. Soient à cet effet $G_1, G_2, \dots, G_m$ des fonctions majorantes de $F_1, F_2, \dots, F_m$. Désignons de plus par g_i ($i = 1, 2, \dots, m$) le minimum de la valeur absolue de l'expression (36). Considérons les équations

$$(38) \quad \begin{cases} g_i(w_i - |A_i| \tau^{\mu_i}) = G_i(w_1, w_2, \dots, w_m), & i = 1, 2, \dots, p, \\ g_i w_i = G_i(w_1, w_2, \dots, w_m). & i = p+1, \dots, m. \end{cases}$$

Un théorème bien connu sur l'inversion de séries de puissances nous apprend qu'on peut tirer de ces équations les valeurs de $w_1, w_2, \dots, w_m$ exprimés en séries de puissances des p arguments $\tau^{\mu_1}, \tau^{\mu_2}, \dots, \tau^{\mu_p}$. Ces séries convergent, pourvu que les valeurs absolues des arguments, et par conséquent de τ , soient assez petites. Soient

$$(39) \quad \begin{cases} w_i = |A_i| \tau^{\mu_i} + \sum \gamma_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)} \tau^{x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 + \dots + x_p \mu_p}, & i = 1, 2, \dots, p, \\ w_i = \sum \gamma_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)} \tau^{x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 + \dots + x_p \mu_p}, & i = p+1, \dots, m \end{cases}$$

ces séries. Après substitution, les G_i prennent la forme

$$G_i = \sum \delta_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)} \tau^{x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 + \dots + x_p \mu_p}.$$

Les δ se forment des $|A|$ et des γ par des opérations d'addition et de multiplication de la même manière que les β se forment des A et des α ; seulement les coefficients sont toujours positifs et plus grands en valeur absolue que dans ce dernier cas. Les γ se calculent au moyen des égalités de la forme

$$g_i \gamma_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)} = \delta_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

En comparant ces formules de récursion aux formules (35), on voit que

$$|\alpha_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)}| < \gamma_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)}$$

et la convergence, pour τ assez petit, des séries (33) est donc une conséquence de la convergence des séries (39).

Remarquons que les séries (33) sont aussi des séries de puissances des constantes d'intégration $A_1, A_2, \dots, A_p$. En effet ces constantes n'entrent dans les séries que dans les combinaisons $A_1 \tau^{\mu_1}, A_2 \tau^{\mu_2}, \dots, A_p \tau^{\mu_p}$. Une série de puissances de $\tau^{\mu_1}, \tau^{\mu_2}, \dots, \tau^{\mu_p}$ est donc aussi une série de puissances de $A_1, A_2, \dots, A_p$.

Nous allons maintenant considérer le cas où il existe une relation telle que (37) entre les exposants $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$. Pour étudier ce cas, il vaut mieux réduire les équations (28) au premier ordre par la substitution

$$(40) \quad \tau \frac{dv_i}{d\tau} = v'_i. \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

On tire de là

$$D(v_i) = \tau \frac{dv_i'}{d\tau} + v_i' - 2v_i',$$

et les équations (28) deviennent

$$(41) \quad \tau \frac{dv_i'}{d\tau} = \left(2 + \frac{s_i}{k^2}\right) v_i' - v_i' + \dots \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

Ces équations, jointes aux équations (40), forment un système de $2m = q$ équations différentielles du premier ordre. Réduisons par le moyen connu ce système à la forme normale

$$\tau \frac{dx_r}{d\tau} = \bar{\mu}_r x_r + \dots \quad (r = 1, 2 \dots q)$$

Bien entendu, il ne faut pas confondre ces variables x_r avec les coordonnées rectilignes x .

Pour la détermination des μ_r nous avons les équations

$$\begin{vmatrix} -\mu, & 2 + \frac{s}{k^2} \\ 1, & -1 - \mu \end{vmatrix} = 0, \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

c'est à dire

$$\mu^2 + \mu - \left(2 + \frac{s}{k^2}\right) = 0,$$

ce qui est précisément l'équation (31a). Les $2m$ quantités $\bar{\mu}$ ne sont donc autre chose que $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_m, \nu_1, \nu_2 \dots \nu_m$. Par conséquent, en désignant les quantités $\nu_1, \nu_2 \dots \nu_m$ par $\mu_{m+1}, \mu_{m+2} \dots \mu_{2m}$, nous avons le système d'équations

$$(42) \quad \tau \frac{dx_i}{d\tau} = \mu_i x_i + P_i(x_1, x_2 \dots x_q). \quad (i = 1, 2 \dots q)$$

Si l'on néglige d'abord les termes du degré supérieur, on a les intégrales

$$\begin{aligned} x_i &= B_i \tau^{\mu_i}, & (i = 1, 2 \dots p), \\ x_i &= 0. & (i = p + 1, \dots q). \end{aligned}$$

Cherchons maintenant une solution des équations (42) qui soit développée suivant les puissances des constantes d'intégration $B_1, B_2, \dots B_p$:

$$(43) \quad \begin{cases} x_i = B_i \tau^{\mu_i} + \Sigma f_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)} B_1^{x_1} B_2^{x_2} \dots B_p^{x_p}, & (i = 1, 2 \dots p), \\ x_i = \Sigma f_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)} B_1^{x_1} B_2^{x_2} \dots B_p^{x_p}. & (i = p + 1, \dots q). \end{cases}$$

Les f seront des fonctions de τ qui disparaîtront tous pour $\tau = 0$. Les sommes doivent comprendre toutes les valeurs entières de $x_1, x_2 \dots x_p$ satisfaisant aux inégalités

$$x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_p > 0;$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p \geq 2.$$

Si nous substituons les séries (43) dans les équations (42), les fonctions P_i deviennent des séries de puissances en $B_1, B_2 \dots B_p$:

$$P_i = \sum p_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)} B_1^{x_1} B_2^{x_2} \dots B_p^{x_p}, \quad (i = 1, 2 \dots q)$$

et les $p^{(i)}$ se forment des f par des opérations d'addition et de multiplication.

Les f sont alors déterminés par des équations de la forme

$$\tau \frac{d f_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}}{d \tau} - \mu_i f_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)} = p_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)},$$

ce qui donne, si nous nous permettons d'omettre les indices

$$(44) \quad f(\tau) = \tau^{\mu_i} \int \frac{p(\tau)}{\tau^{1+\mu_i}} d\tau.$$

La constante arbitraire doit être choisie de manière que le terme en τ^{μ_i} disparaisse.

Les équations (44) nous permettent de calculer les fonctions $f(\tau)$ par récurrence. $p_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}$ sera en général une fonction de la forme

$$C \tau^{[x\mu]}, \quad [x\mu] = x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 + \dots + x_p \mu_p.$$

On aura alors

$$f_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)} = \frac{C}{[x\mu] - \mu_i} \tau^{[x\mu]}.$$

Par conséquent, si le cas exceptionnel $[x\mu] = \mu_i$ ne se présente jamais, les f seront tous des puissances de τ . C'est le cas général déjà étudié. Passons au cas où un des exposants, μ_1 par exemple, est une combinaison linéaire de quelques-uns des autres. Supposons donc

$$(45) \quad \mu_1 = \lambda_2 \mu_2 + \dots + \lambda_p \mu_p,$$

où $\lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont des nombres entiers non négatifs, dont la somme est au moins égale à deux. Le coefficient $p_{0, \lambda_2 \dots \lambda_p}^{(1)}$ sera alors de la forme

$$p_{0, \lambda_2 \dots \lambda_p}^{(1)} = K \tau^{\mu_1},$$

où K est une constante. $f_{0, \lambda_2 \dots \lambda_p}^{(1)}$ sera donc déterminé par

$$f_{0, \lambda_2 \dots \lambda_p}^{(1)} = \tau^{\mu_1} \int \frac{K d\tau}{\tau} = K \tau^{\mu_1} \log \tau.$$

Il s'introduira donc des logarithmes. Puis le terme $f_{0, \lambda_2 \dots \lambda_p}^{(1)}$ donnera à droite dans (42) naissance à des termes de la forme

$$p(\tau) = L \tau^s (\log \tau)^s$$

où s est un nombre entier et r est au moins égal à $s\mu_1$. Le f correspondant est donné par

$$f = L \tau^{\mu_i} \int \tau^{r-\mu_i-1} (\log \tau)^s d\tau.$$

Je dis que f sera de la forme

$$f = \tau^r [M_0 + M_1 \log \tau + \dots + M_s (\log \tau)^s],$$

où $M_0, M_1, \dots, M_s$ seront des constantes. On trouve en effet en divisant par τ^{μ_i} et en dérivant

$$\begin{aligned} \tau^{r-\mu_i-1} \left[(r-\mu_i) (M_0 + M_1 \log \tau + \dots + M_s (\log \tau)^s) + M_1 + 2 M_2 \log \tau + \dots + s M_s (\log \tau)^{s-1} \right] = \\ = L \tau^{r-\mu_i-1} (\log \tau)^s. \end{aligned}$$

Les constantes $M_0, M_1, \dots, M_s$ seront donc déterminées par

$$\begin{aligned} (r-\mu_i) M_s &= L, \\ (r-\mu_i) M_j + (j+1) M_{j+1} &= 0, \quad j = 0, 1, \dots, s-1 \end{aligned}$$

Ces équations sont résolubles par rapport à $M_0, M_1, \dots, M_s$, si $r - \mu_i$ n'est pas égal à zéro. Or $r - \mu_i = 0$ serait une deuxième relation exceptionnelle entre les exposants. Nous supposons cependant qu'il n'existe que la seule relation exceptionnelle (45).

Puis le f ainsi obtenu donnera naissance à de nouveaux termes de la même espèce.

Nous arrivons donc au résultat suivant: Si les exposants $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ satisfont à une équation telle que (45), il sera toujours possible de satisfaire formellement aux équations différentielles par des séries de puissances en $B_1, B_2, \dots, B_p$. Ces séries sont aussi des séries de puissances en $\tau^{\mu_2}, \dots, \tau^{\mu_p}$, mais au lieu des puissances de τ^{μ_1} , nous aurons des expressions de la forme

$$\tau^{s\mu_1} R_s (\log \tau),$$

où R_s désigne un polynôme du degré s au plus.

Il reste la question de la convergence. Introduisons d'abord au lieu de $P_1, P_2, \dots, P_q$ dans (42) des fonctions majorantes $Q_1, Q_2, \dots, Q_q$:

$$P_i \ll Q_i \text{ (arg. } x_1, x_2, \dots, x_q)$$

Déterminons de plus de nouveaux exposants $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$:

$$\rho_1 < \mu_1, \rho_2 < \mu_2, \dots, \rho_p < \mu_p.$$

Bien entendu, les ρ_i doivent être tous positifs. Ils doivent de plus satisfaire à certaines conditions que j'indiquerai plus tard.

Les valeurs absolues des expressions

$$|x \rho| - \mu_i \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

ont des limites inférieures plus grandes que zéro. Appelons $g_1, g_2, \dots, g_q$ ces limites.

Envisageons les équations en $y_1, y_2, \dots, y_q$

$$(46) \quad \begin{cases} g_i(y_i - B_i \tau^{\rho_i}) = Q_i(y_1, y_2, \dots, y_q), & i = 1, 2, \dots, p \\ g_i y_i = Q_i(y_1, y_2, \dots, y_q), & i = p + 1, \dots, q \end{cases}$$

On peut tirer de ces équations $y_1, y_2, \dots, y_q$ développés en séries de puissances de $B_1, B_2, \dots, B_p$, et ces séries convergeront, si τ est assez petit. Supposons que ces séries soient

$$(46a) \quad \begin{cases} y_i = B_i \tau^{\rho_i} + \sum h_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)} B_1^{x_1} B_2^{x_2} \dots B_p^{x_p}, & i = 1, 2, \dots, p \\ y_i = \sum h_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)} B_1^{x_1} B_2^{x_2} \dots B_p^{x_p}, & i = p + 1, \dots, q. \end{cases}$$

Je dis qu'on aura toujours, pour τ assez petit

$$(47) \quad \left| f_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)} \right| < h_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)}.$$

Pour le prouver, je classe les coefficients $f_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)}$ en trois catégories.

La première catégorie comprend les coefficients, *en nombre fini*, pour lesquels

$$\mu_i > [x \mu].$$

La deuxième catégorie comprend le seul coefficient $f_{0, \lambda_2, \dots, \lambda_p}^{(i)}$. Pour ce coefficient on a

$$\mu_i = [x \mu].$$

Enfin la troisième catégorie comprend les coefficients, en nombre infini, pour lesquels

$$\mu_i < [x \mu].$$

Nous choisissons les exposants $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ de telle manière que pour les coefficients de la troisième catégorie on ait aussi

$$\mu_i < [x \rho].$$

Pour les coefficients de la première catégorie, on a naturellement

$$\mu_i > [x \rho],$$

puisque $\mu_j > \rho_j$. Enfin nous avons

$$\mu_1 > \lambda_2 \rho_2 + \dots + \lambda_p \rho_p.$$

Or nous avons pour les exposants de la première catégorie¹⁾

$$f_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)} = a_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)} \tau^{[x \mu_i]},$$

tandis qu'on a toujours

$$h_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)} = b_{x_1, x_2, \dots, x_p}^{(i)} \tau^{[x \rho]}.$$

¹⁾ Nous avons supposé ici qu'il n'y a pas de logarithmes dans les coefficients de la première catégorie. Cette supposition, qui n'est d'ailleurs pas nécessaire, est vraie dans le problème des trois corps qui nous intéresse surtout.

Ici $a_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}$ et $b_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}$ désignent des constantes. $b_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}$ est toujours positif et ne peut disparaître sans que le a correspondant ne disparaisse. Or puisque

$$[x \mu] > [x \rho],$$

on peut toujours choisir τ assez petit pour qu'on ait pour les termes de la première catégorie

$$|j_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}| \leq h_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}.$$

Le coefficient de la deuxième catégorie est de la forme

$$j = a \tau^{\mu_1} \log \tau.$$

tandis que le h correspondant est

$$h = b \tau^{x \rho}.$$

Mais

$$\mu_1 > [x \rho] = x_2 \rho_2 + \dots + x_p \rho_p,$$

et on a donc même dans ce cas, pour τ assez petit,

$$|j| < h.$$

Passons aux coefficients de la troisième catégorie. Ces coefficients sont déterminés par les formules de récursion

$$j_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)} = \tau^{\mu_i} \int_0^\tau \frac{p_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}}{\tau^{1+\mu_i}} d\tau.$$

Appelons $q_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}$ les coefficients correspondants aux $p_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}$. Ces coefficients sont définis comme les coefficients de $B_1^{x_1} B_2^{x_2} \dots B_p^{x_p}$ dans le développement de Q_i , lorsqu'on introduit dans (46) les expressions (46 a). Les h sont alors déterminés par les formules de récursion

$$h_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)} = \frac{1}{q_i} q_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}.$$

Les q se forment des h par des opérations d'addition et de multiplication. $q_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}$ est toujours de la forme

$$C \tau^{x \rho}.$$

Or on a

$$h_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)} > \frac{1}{[x \rho] - \mu_i} C \tau^{x \rho} = \tau^{\mu_i} \int_0^\tau \frac{q_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}}{\tau^{1+\mu_i}} d\tau.$$

$q_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}$ et $p_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}$ sont des fonctions des coefficients $h_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}$ et $f_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}$ d'ordre inférieur. Si pour ceux-ci on a démontré l'exactitude de l'inégalité (47), on est certain que

$$|p_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}| < q_{x_1, x_2 \dots x_p}^{(i)}.$$

Donc

$$|f| \leq \tau^{\mu_i} \int_0^{\tau} \frac{|p|}{\tau^{1+\mu_i}} d\tau \leq \tau^{\mu_i} \int_0^{\tau} \frac{q}{\tau^{1+\mu_i}} d\tau \leq h.$$

On démontre ainsi l'exactitude de l'inégalité (47) pour des coefficients d'ordre de plus en plus élevé.

On a donc

$$x, \ll y, \quad (\arg B_1, B_2 \dots B_p)$$

et de la convergence, pour τ assez petit, des séries (46 a) résulte la convergence des séries (43).

III.

Nous allons appliquer les considérations générales précédentes au problème des trois corps. Tout d'abord, il faut calculer les coefficients α_{ij} dans le système (27). Dans le cas en question, ce système contient neuf équations. Les équations du centre de gravité nous permettent cependant d'en réduire le nombre à six, et j'ai déjà indiqué brièvement une manière d'effectuer cette réduction. Mais en pratique il est plus simple de procéder autrement. Choisissons par exemple les variables $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ en éliminant ξ_3, η_3, ζ_3 par les équations (3). Introduisons-y les expressions (23) et divisons par τ^2 ; nous aurons

$$\begin{aligned} m_1(a_1 + \xi_1) + m_2(a_2 + \xi_2) + m_3(a_3 + \xi_3) &= 0, \\ m_1(b_1 + \eta_1) + m_2(b_2 + \eta_2) + m_3(b_3 + \eta_3) &= 0, \\ m_1(c_1 + \zeta_1) + m_2(c_2 + \zeta_2) + m_3(c_3 + \zeta_3) &= 0. \end{aligned}$$

Mais nous avons

$$\begin{aligned} m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 &= 0, \\ m_1 b_1 + m_2 b_2 + m_3 b_3 &= 0, \\ m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_3 c_3 &= 0. \end{aligned} \quad .$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 + m_3 \xi_3 &= 0, \\ m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2 + m_3 \eta_3 &= 0, \\ m_1 \zeta_1 + m_2 \zeta_2 + m_3 \zeta_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations nous donnent ξ_3, η_3, ζ_3 en fonctions linéaires des autres variables.

On obtient de cette manière les équations différentielles

R_1, R_2, S_1, S_2 . T_1 et T_2 contiennent des termes du deuxième degré au moins.

Il faut maintenant calculer les valeurs des dérivées partielles de la fonction V correspondant aux valeurs des constantes a_i, b_i, c_i que nous avons trouvées dans I.

Commençons par le cas où les trois corps se rangent de plus en plus en ligne droite. En faisant usage de (18) on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1^2} &= \frac{2m_2}{\chi^3} + \frac{2m_3}{(1+\chi)^3}, & \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_1} &= -\frac{2m_1}{\chi^3}, \\
\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_2} &= -\frac{2m_2}{\chi^3}, & \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial a_2^2} &= \frac{2m_1}{\chi^3} + 2m_3, \\
\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_3} &= -\frac{2m_3}{(1+\chi)^3}, & \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_3} &= -2m_3, \\
\\
\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial b_1^2} &= \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial c_1^2} = -\frac{m_2}{\chi^3} - \frac{m_3}{(1+\chi)^3}, & \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial b_2 \partial b_1} &= \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial c_2 \partial c_1} = \frac{m_1}{\chi^3}, \\
\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial b_1 \partial b_2} &= \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial c_1 \partial c_2} = \frac{m_2}{\chi^3}, & \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial b_2^2} &= \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial c_2^2} = -\frac{m_1}{\chi^3} - m_3, \\
\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial b_1 \partial b_3} &= \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial c_1 \partial c_3} = \frac{m_3}{(1+\chi)^3}, & \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial b_2 \partial b_3} &= \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial c_2 \partial c_3} = m_3, \\
\\
\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial b_j} &= \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial c_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial c_j} = 0. & (i, j = 1, 2, 3)
\end{aligned}$$

Ici, χ est la racine positive (il y en a une et une seulement) de l'équation (16).

Remarquons de plus que toutes les dérivées partielles de V prises une seule fois par rapport à b_1, b_2, b_3 ou à c_1, c_2, c_3 sont égales à zéro.

Les équations différentielles seront:

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} k^2 D(\xi_1) &= 2 \left(\frac{m_1 + m_3}{(1+\chi)^3} + \frac{m_2}{\chi^3} \right) \xi_1 + 2 \left(\frac{m_2}{(1+\chi)^3} - \frac{m_2}{\chi^3} \right) \xi_2 + R_1, \\ k^2 D(\xi_2) &= 2 \left(m_1 - \frac{m_1}{\chi^3} \right) \xi_1 + 2 \left(\frac{m_1}{\chi^3} + m_2 + m_3 \right) \xi_2 + R_2, \\ k^2 D(\eta_1) &= - \left(\frac{m_1 + m_3}{(1+\chi)^3} + \frac{m_2}{\chi^3} \right) \eta_1 - \left(\frac{m_2}{(1+\chi)^3} - \frac{m_2}{\chi^3} \right) \eta_2 + S_1, \\ k^2 D(\eta_2) &= - \left(m_1 - \frac{m_1}{\chi^3} \right) \eta_1 - \left(\frac{m_1}{\chi^3} + m_2 + m_3 \right) \eta_2 + S_2, \\ k^2 D(\zeta_1) &= - \left(\frac{m_1 + m_3}{(1+\chi)^3} + \frac{m_2}{\chi^3} \right) \zeta_1 - \left(\frac{m_2}{(1+\chi)^3} - \frac{m_2}{\chi^3} \right) \zeta_2 + T_1, \\ k^2 D(\zeta_2) &= - \left(m_1 - \frac{m_1}{\chi^3} \right) \zeta_1 - \left(\frac{m_1}{\chi^3} + m_2 + m_3 \right) \zeta_2 + T_2. \end{aligned} \right.$$

Dans S_1 et S_2 , tous les termes contiennent η_1 ou η_2 . En effet un terme ne contenant ni η_1 ni η_2 devait avoir pour coefficient une combinaison linéaire de

dérivées de V prises une seule fois par rapport à b_1 ou b_2 , et ces dérivées sont égales à zéro. Nous pouvons par conséquent écrire

$$(50) \quad \begin{cases} S_1 = \eta_1 S_1^{(1)} + \eta_2 S_1^{(2)}, \\ S_2 = \eta_1 S_2^{(1)} + \eta_2 S_2^{(2)}. \end{cases}$$

De même nous avons

$$(50a) \quad \begin{cases} T_1 = \zeta_1 T_1^{(1)} + \zeta_2 T_1^{(2)}, \\ T_2 = \zeta_1 T_2^{(1)} + \zeta_2 T_2^{(2)}. \end{cases}$$

Dans le système (49), les variables entrent en paires. Si l'on fait abstraction des termes du degré supérieur, les deux premières équations ne contiennent en effet que ξ_1 et ξ_2 , tandis que les deux suivantes contiennent η_1, η_2 et les deux dernières ζ_1, ζ_2 . Grâce à cette circonstance, la réduction à la forme normale se décompose en trois opérations: la réduction de ξ_1 et ξ_2 en deux nouvelles variables v_1 et v_2 , la réduction de η_1, η_2 en v_3, v_4 et enfin la réduction de ζ_1, ζ_2 en v_5, v_6 . L'équation en s se décompose en trois; d'abord

$$(51) \quad \begin{vmatrix} 2 \left(\frac{m_1 + m_3}{(1 + \gamma)^3} + \frac{m_2}{\chi^3} \right) - s, & 2 \left(\frac{m_2}{(1 + \gamma)^3} - \frac{m_2}{\chi^3} \right) \\ 2 \left(m_1 - \frac{m_1}{\chi^3} \right), & 2 \left(\frac{m_1}{\chi^3} + m_2 + m_3 \right) - s \end{vmatrix} = 0,$$

qui nous donnera s_1 et s_2 , et puis

$$(52) \quad \begin{vmatrix} - \left(\frac{m_1 + m_3}{(1 + \gamma)^3} + \frac{m_2}{\chi^3} \right) - s, & - \left(\frac{m_2}{(1 + \gamma)^3} - \frac{m_2}{\chi^3} \right) \\ - \left(m_1 - \frac{m_1}{\chi^3} \right), & - \left(\frac{m_1}{\chi^3} + m_2 + m_3 \right) - s \end{vmatrix} = 0,$$

pour la détermination de s_3 et s_4 . L'équation pour s_5 et s_6 sera identique à (52).

On voit tout de suite que les racines de (52) sont la moitié des racines de (51) avec le signe renversé. Il suffit donc de résoudre une de ces équations.

L'équation (52) s'écrit

$$(53) \quad s^2 + As + B = 0,$$

avec

$$A = \frac{1}{\chi^3 (1 + \chi)^3} [(m_2 + m_3) \chi^6 + 3 (m_2 + m_3) \chi^5 + 3 (m_2 + m_3) \chi^4 + 2 (m_1 + m_2 + m_3) \chi^3 + 3 (m_1 + m_2) \chi^2 + 3 (m_1 + m_2) \chi + m_1 + m_2],$$

$$B = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\chi^3 (1 + \chi)^3} [(m_2 + m_3) \chi^3 + 3 m_2 \chi^2 + 3 m_2 \chi + m_1 + m_2].$$

L'équation (16) nous permet d'éliminer de l'expression de A le terme en χ^6 et le terme indépendant de γ . Nous obtenons ainsi cette expression plus simple:

$$A = \frac{1}{\chi^2 (1 + \chi)^3} [(2 m_2 + m_3) \chi^4 + (4 m_2 + 3 m_3) \chi^3 + (5 m_1 + 4 m_2 + 5 m_3) \chi^2 + (3 m_1 + 4 m_2) \chi + m_1 + 2 m_2].$$

La solution de (53) est

$$s = \frac{1}{2} (-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}).$$

Or le radical peut s'exprimer rationnellement en fonction de χ . Je dis qu'on a en effet

$$A - 4k^2 = \sqrt{A^2 - 4B}.$$

En élevant cette équation au carré, on trouve

$$4k^4 - 2Ak^2 + B = 0,$$

et si l'on y introduit les expressions en χ de A , B et k^2 , on constate par un calcul un peu long mais tout à fait élémentaire que le membre gauche de cette équation contient en facteur le membre gauche de l'équation (16) et est par suite égal à zéro. On a donc

$$\sqrt{A^2 - 4B} = \frac{1}{\chi^2(1+\chi)^3} (m_3\chi^4 + 3m_3\chi^3 + 3(m_1+m_3)\chi^2 + 3m_1\chi + m_1).$$

Introduisons maintenant la notation

$$(54) \quad \beta = \frac{m_3\chi^4 + 3m_3\chi^3 + 3(m_1+m_3)\chi^2 + 3m_1\chi + m_1}{m_2\chi^4 + 2m_2\chi^3 + (m_1+2m_2+m_3)\chi^2 + 2m_2\chi + m_2}.$$

On trouve alors, en se rappelant l'expression (17) de k^2 :

$$(55) \quad \begin{cases} s_3 = -2k^2, \\ s_4 = -2k^2(1+\beta). \end{cases}$$

Les racines s_5 et s_6 sont égales à s_3 et s_4 . Au moyen des égalités

$$\begin{aligned} s_1 &= -2s_3, \\ s_2 &= -2s_4 \end{aligned}$$

on déduit les racines de (51):

$$(56) \quad \begin{cases} s_1 = 4k^2, \\ s_2 = 4k^2(1+\beta). \end{cases}$$

La réduction faite, nous avons six variables $v_1, v_2, \dots, v_6$, dont v_1, v_2 sont des combinaisons linéaires de ξ_1, ξ_2 , les deux suivantes des combinaisons de η_1, η_2 , et enfin v_5, v_6 des combinaisons de ζ_1, ζ_2 . Ces variables satisfont à des équations différentielles de la forme suivante:

$$(57) \quad k^2 D(v_i) = s_i v_i + F_i(v_1, v_2, \dots, v_6). \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

En tenant compte de (50), on trouve que F_3 et F_4 sont de la forme suivante:

$$(58) \quad \begin{cases} F_3 = v_3 \Phi_3 + v_4 \Psi_3, \\ F_4 = v_3 \Phi_4 + v_4 \Psi_4. \end{cases}$$

De même on trouve pour F_5 et F_6 :

$$(58a) \quad \begin{cases} F_5 = v_5 \Phi_5 + v_6 \Psi_5, \\ F_6 = v_5 \Phi_6 + v_6 \Psi_6. \end{cases}$$

Les exposants $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_6$ sont les plus grandes racines des équations (31 a). Voici les valeurs de ces exposants:

$$(59) \quad \begin{cases} \mu_1 = 2, \\ \mu_2 = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{25 + 16\beta}), \\ \mu_3 = \mu_5 = 0, \\ \mu_4 = \mu_6 = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 - 8\beta}). \end{cases}$$

On a donc deux exposants nuls. C'est un résultat qu'on pouvait prévoir. Nous sommes en effet partis d'une certaine solution exacte du problème des trois corps, avec ceux-ci rangés en ligne droite. Nous avons supposé que cette ligne coïncide avec l'axe des x . Mais il y a naturellement aussi d'autres solutions exactes où cette ligne droite ne se confond pas avec l'axe des x . Ces solutions doivent se trouver aussi parmi les solutions des équations (49). Ces équations doivent donc admettre des solutions particulières où $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ sont égaux à des constantes. Or cela n'est pas possible, s'il n'y a pas d'exposants nuls.¹⁾ La solution exacte dépend dans ce cas de *deux* constantes arbitraires. La direction de la droite contenant les trois corps est en effet fixée par *deux* constantes. Par conséquent la solution particulière $\xi_1 = \text{const.}, \dots, \zeta_2 = \text{const.}$ doit dépendre de deux quantités arbitraires. C'est pourquoi *deux* exposants μ_i doivent être égaux à zéro.

Nous pouvons toujours supposer nulles les constantes A_3 et A_5 correspondant aux exposants μ_3 et μ_5 . Si ces constantes n'étaient pas égales à zéro, cela voudrait dire que les trois corps ne s'approchaient pas de la solution exacte dont nous sommes partis, mais d'une autre. Or il suffirait alors de faire tourner le système des axes de manière à faire coïncider l'axe des x avec la ligne que forment les trois corps dans cette solution exacte, et alors on revient au cas où $A_3 = A_5 = 0$.

Puisque β est une quantité positive, les exposants μ_4 et μ_6 sont négatifs ou imaginaires avec leurs parties réelles négatives. Il faut donc poser les constantes d'intégration correspondantes égales à zéro.

En somme nous avons

$$A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = 0.$$

Mais alors on trouve en tenant compte des expressions (58) et (58a) de F_3, F_4, F_5, F_6 , que tous les coefficients du développement de v_3, v_4, v_5, v_6 disparaissent.

¹⁾ Il est vrai que dans ce cas la relation exceptionnelle $\mu_i = [x\mu]$ se présente et même une infinité de fois. Mais notre raisonnement montre bien que la solution est tout de même possible sans l'emploi de logarithmes.

On a donc

$$c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0,$$

et par conséquent

$$\eta_1 = \eta_2 = \zeta_1 = \zeta_2 = 0.$$

Le mouvement a donc toujours lieu sur l'axe des x .

Les quantités ξ_1 et ξ_2 sont développables selon les puissances entières de τ^{μ_1} et τ^{μ_2} , du moins s'il n'existe pas de relation de la forme

$$(60) \quad \mu_2 = p \mu_1,$$

où p est un nombre entier au moins égal à deux.

Or μ_2 dépend des masses par la quantité auxiliaire β . Il faut donc avant tout discuter l'expression de β . Cette quantité est donnée par (54), où il faut substituer la valeur de χ tirée de l'équation (16).

Les masses et χ étant des quantités positives, β est toujours positif. β est une fonction des rapports des masses. Si l'on permute m_1 avec m_3 , χ se change en $\frac{1}{\chi}$, et si, dans l'expression de β , on remplace χ par $\frac{1}{\chi}$ et permute m_1 avec m_3 , β ne change pas. β est donc symétrique en m_1 et m_3 . Il suffit donc de considérer le cas $\chi \leq 1$. Le cas $\chi > 1$ s'y réduit immédiatement par la permutation de m_1 avec m_3 .

Pour $m_1 = m_3 = 0$, β disparaît. Pour $m_1 = m_2 = 0$, on a $\chi = 0$ et β est indéterminé, prenant la forme $\frac{0}{0}$. On en trouve la valeur de la manière suivante. Si m_1 et m_2 sont très petits, on a approximativement

$$\chi = \left(\frac{m_1 + m_2}{3 m_3} \right)^{1/3}.$$

Substituons cette valeur dans l'expression de β . On trouve que dans le numérateur aussi bien que dans le dénominateur, les plus grands termes sont les termes en χ^2 . Abstraction faite des quantités d'ordre supérieur, on a donc

$$\beta = \frac{3 m_3 \chi^2}{m_3 \chi^2} = 3.$$

Remarquons que dans ce cas extrême, nos recherches ne peuvent pas s'appliquer. En effet, puisque la quantité d_{12} disparaît, le développement de V et de ses dérivées partielles selon les puissances de ξ_1 et ξ_2 n'est plus possible.

β ne peut jamais devenir infini. Pour cela il faudrait que le dénominateur disparût. Or cela n'arrive que si $m_1 = m_2 = 0$, et alors on a $\beta = 3$. β doit donc admettre un maximum fini.

Si $m_1 = m_3$, on a $\chi = 1$, et l'expression de β se simplifie beaucoup. On a dans ce cas

$$\beta = \frac{7m_1}{m_1 + 4m_2}.$$

Le maximum est alors $\beta = 7$, et ce maximum est atteint pour $m_2 = 0$.

Quant à l'exposant μ_2 , il s'ensuit les résultats suivants. Le minimum de μ_2 est $\mu_2 = 2$. Ce minimum est atteint pour $\beta = 0$, c'est à dire $m_1 = m_3 = 0$. Le problème se réduit alors à deux problèmes de deux corps. En tout autre cas, μ_2 est plus grand que 2. μ_2 admet un maximum fini.

Pour

$$\mu_2 = 4, 6, 8, \dots$$

nous aurons le cas exceptionnel. Les valeurs correspondantes de β sont

$$\beta = \frac{7}{2}, 9, \frac{33}{2}, \dots$$

Si l'on a $m_1 = m_3$, β a le maximum $\beta = 7$ et la première valeur est la seule possible.

Dans le cas d'exception, la solution peut toujours être formée à l'aide des logarithmes. Mais il n'est pas certain que les logarithmes s'introduisent dans tous les cas exceptionnels. Considérons par exemple le cas $m_1 = m_3$. Le seul cas d'exception qui puisse alors se présenter est $m_1 = 4m_2$. On a alors $\beta = \frac{7}{2}$ et $\mu_2 = 4$, de manière que

$$\mu_2 = 2\mu_1.$$

Si nous calculons les termes du deuxième degré dans les équations qui déterminent v_1 et v_2 , nous trouvons

$$D(v_1) - 4v_1 = -3v_1^2 - \frac{3}{2}v_2^2 + \dots,$$

$$D(v_2) - 18v_2 = -3v_1v_2 + \dots,$$

les termes non écrits étant du troisième degré au moins.

Rappelons-nous comment s'introduisent les logarithmes. Cela a lieu, si pendant le calcul successif des termes il se présente à droite dans la seconde équation un terme en τ^4 . Un tel terme ne peut provenir que d'un terme en v^2 , et puisque ce terme manque dans la seconde équation, il n'y aura pas de logarithmes dans la solution.

Nous allons maintenant examiner l'autre cas, celui où la figure formée par les trois corps tend à devenir un triangle équilatéral. En faisant usage des expressions (20), on trouve pour les dérivées partielles de V les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1^2} &= -m_2 + \frac{5}{4} m_3, & \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial b_1} &= + \frac{3\sqrt{3}}{4} m_3, \\
\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_2} &= +m_2, & \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial b_2} &= 0, \\
\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_3} &= -\frac{5}{4} m_3, & \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial b_3} &= -\frac{3\sqrt{3}}{4} m_3, \\
\frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_1} &= +m_1, & \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial b_1} &= 0, \\
\frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial a_2^2} &= -m_1 + \frac{5}{4} m_3, & \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial b_2} &= -\frac{3\sqrt{3}}{4} m_3, \\
\frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_3} &= -\frac{5}{4} m_3, & \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial b_3} &= +\frac{3\sqrt{3}}{4} m_3, \\
\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial b_1 \partial a_1} &= +\frac{3\sqrt{3}}{4} m_3, & \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial b_1^2} &= +2m_2 - \frac{1}{4} m_3, \\
\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial b_1 \partial a_2} &= 0, & \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial b_1 \partial b_2} &= -2m_2, \\
\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial b_1 \partial a_3} &= -\frac{3\sqrt{3}}{4} m_3, & \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial b_1 \partial b_3} &= +\frac{1}{4} m_3, \\
\frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial b_2 \partial a_1} &= 0, & \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial b_2 \partial b_1} &= -2m_1, \\
\frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial b_2 \partial a_2} &= -\frac{3\sqrt{3}}{4} m_3, & \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial b_2^2} &= +2m_1 - \frac{1}{4} m_3, \\
\frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial b_2 \partial a_3} &= +\frac{3\sqrt{3}}{4} m_3, & \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial b_2 \partial b_3} &= +\frac{1}{4} m_3, \\
\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial c_1^2} &= -(m_2 + m_3), & \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial c_2 \partial c_1} &= +m_1, \\
\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial c_1 \partial c_2} &= +m_2, & \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial c_2^2} &= -(m_1 + m_3), \\
\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 V}{\partial c_1 \partial c_3} &= +m_3, & \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 V}{\partial c_2 \partial c_3} &= +m_3,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial c_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial c_j} = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Remarquons de plus que toutes les dérivées partielles de V prises une seule fois par rapport à c_1 , c_2 ou c_3 sont égales à zéro.

En substituant ces valeurs dans les équations (48) on obtient le système:

$$\begin{aligned}
(61) \quad \left\{ \begin{aligned}
k^2 D(\xi_1) &= \left(\frac{5}{4} (m_1 + m_3) - m_2 \right) \xi_1 + \frac{9}{4} m_2 \xi_2 + \\
&\quad + \frac{3 \sqrt{3}}{4} (m_1 + m_3) \eta_1 + \frac{3 \sqrt{3}}{4} m_2 \eta_2 + R_1, \\
k^2 D(\xi_2) &= \frac{9}{4} m_1 \xi_1 + \left(\frac{5}{4} (m_2 + m_3) - m_1 \right) \xi_2 - \\
&\quad - \frac{3 \sqrt{3}}{4} m_1 \eta_1 - \frac{3 \sqrt{3}}{4} (m_2 + m_3) \eta_2 + R_2, \\
k^2 D(\eta_1) &= \frac{3 \sqrt{3}}{4} (m_1 + m_3) \xi_1 + \frac{3 \sqrt{3}}{4} m_2 \xi_2 + \\
&\quad + \left(2 m_2 - \frac{1}{4} (m_1 + m_3) \right) \eta_1 - \frac{9}{4} m_2 \eta_2 + S_1, \\
k^2 D(\eta_2) &= - \frac{3 \sqrt{3}}{4} m_1 \xi_1 - \frac{3 \sqrt{3}}{4} (m_2 + m_3) \xi_2 - \\
&\quad - \frac{9}{4} m_1 \eta_1 + \left(2 m_1 - \frac{1}{4} (m_2 + m_3) \right) \eta_2 + S_2, \\
k^2 D(\zeta_1) &= - M \zeta_1 + T_1, \\
k^2 D(\zeta_2) &= - M \zeta_2 + T_2.
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Dans T_1 et T_2 , tous les termes contiennent ζ_1 et ζ_2 , car un terme ne contenant ni ζ_1 ni ζ_2 aurait pour coefficient des dérivées de V prises une seule fois par rapport à c_1 ou c_2 . T_1 et T_2 sont donc de la forme

$$(62) \quad \begin{cases} T_1 = \zeta_1 T_1^{(1)} + \zeta_2 T_1^{(2)}, \\ T_2 = \zeta_1 T_2^{(1)} + \zeta_2 T_2^{(2)}. \end{cases}$$

On voit que ζ_1 et ζ_2 n'entrent pas dans les parties linéaires des quatre premières équations et que les deux dernières équations ont déjà la forme normale. On peut donc tout de suite indiquer les valeurs de deux des exposants μ_i . Rappelons-nous la valeur (19) de $2k^2$; nous trouvons alors

$$\mu_5 = \mu_6 = 0.$$

De même que dans le cas de la ligne droite, ce résultat est dû à la circonstance qu'il y a d'autres solutions exactes que celle dont nous sommes partis. Ici encore, on ne diminue pas la généralité en supposant nulles les constantes A_5 et A_6 qui correspondent aux deux exposants nuls. A cause de la forme (62) de T_1 et T_2 , on trouve alors que ζ_1 et ζ_2 sont identiquement égaux à zéro. Le mouvement a donc toujours lieu dans un plan. Ce résultat a été déjà obtenu par M. SUNDMAN.

Pour la réduction des quatre premières équations (61) à la forme normale, nous avons à résoudre l'équation suivante:

$$(63) \quad \begin{vmatrix} \frac{5}{4} M - \frac{9}{4} m_2 - s, & \frac{9}{4} m_1, & \frac{3\sqrt{3}}{4} (m_1 + m_3), & -\frac{3\sqrt{3}}{4} m_1 \\ \frac{9}{4} m_2, & \frac{5}{4} M - \frac{9}{4} m_1 - s, & \frac{3\sqrt{3}}{4} m_2, & -\frac{3\sqrt{3}}{4} (m_2 + m_3) \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} (m_1 + m_3), & -\frac{3\sqrt{3}}{4} m_1, & \frac{9}{4} m_2 - \frac{1}{4} M - s, & -\frac{9}{4} m_1 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} m_2, & -\frac{3\sqrt{3}}{4} (m_2 + m_3), & -\frac{9}{4} m_2, & \frac{9}{4} m_1 - \frac{1}{4} M - s \end{vmatrix} = 0.$$

Soient s_1, s_2, s_3, s_4 les quatre racines de cette équation. Les exposants $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ seront alors les racines les plus grandes des équations

$$(64) \quad \mu_i^2 + \mu_i - 2 = \frac{s_i}{k^2} = \frac{2s_i}{M}.$$

Je dis qu'un des μ_i sera égal à zéro. Même dans le mouvement plan, la solution exacte dépend en effet d'une constante arbitraire puisqu'on peut supposer le triangle formé par les trois corps orienté d'une manière quelconque dans le plan des xy . D'après ce que nous avons dit, cela entraîne qu'un exposant doit disparaître. L'équation (64) montre alors que le s_i correspondant doit être égal à $-M$. Par conséquent, si nous introduisons au lieu de s une nouvelle quantité σ , définie par

$$s = \frac{3}{4} \sigma - M,$$

l'équation en σ aura une racine zéro. Le facteur $\frac{3}{4}$ a été choisi pour simplifier davantage les expressions.

L'équation en σ sera

$$(65) \quad \begin{vmatrix} 3(m_1 + m_3) - \sigma, & 3m_1, & \sqrt{3}(m_1 + m_3), & -\sqrt{3}m_1, \\ 3m_2, & 3(m_2 + m_3) - \sigma, & \sqrt{3}m_2, & -\sqrt{3}(m_2 + m_3) \\ \sqrt{3}(m_1 + m_3), & -\sqrt{3}m_1, & M + 3m_2 - \sigma, & -3m_1 \\ \sqrt{3}m_2, & -\sqrt{3}(m_2 + m_3), & -3m_2, & M + 3m_1 - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Développée, cette équation est de la forme

$$(66) \quad \sigma^4 - K_1 \sigma^3 + K_2 \sigma^2 - K_3 \sigma + K_4 = 0.$$

Ici K_1 est la somme des quatre éléments de la diagonale, K_2 est la somme de six déterminants du deuxième ordre, K_3 la somme de quatre déterminants du troisième ordre, et enfin K_4 le déterminant du quatrième ordre qu'on obtient en supprimant σ dans (65).

Vérifions que l'équation (66) a en effet une racine égale à zéro. Pour cela, il faut que

$$K_4 = 0.$$

Au facteur 9 près, ce coefficient est égal à

$$\begin{vmatrix} m_1 + m_3, & m_1, & m_1 + m_3, & -m_1 \\ m_2, & m_2 + m_3, & m_2, & -(m_2 + m_3) \\ m_1 + m_3, & -m_1, & M + 3 m_2, & -3 m_1 \\ m_2, & -(m_2 + m_3), & -3 m_2, & M + 3 m_1 \end{vmatrix}$$

Au lieu de la première colonne, nous substituons la différence entre la première et la troisième, et au lieu de la deuxième, la somme de la deuxième et la quatrième. On peut diviser par $16 m_1 m_2$, et il reste

$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & m_1 + m_3, & -m_1 \\ 0, & 0, & m_2, & -(m_2 + m_3) \\ -1, & -1, & M + 3 m_2, & -3 m_1 \\ 1, & 1, & -3 m_2, & M + 3 m_1 \end{vmatrix}$$

Or, ce déterminant est égal à zéro, puisque deux de ses colonnes sont égales entre elles.

On a donc en effet $K_4 = 0$. Calculons les autres coefficients de l'équation (66). On obtient

$$(67) \quad \sigma^4 - 8 M \sigma^3 + (16 M^2 + 12 N) \sigma^2 - 48 M N \sigma = 0.$$

Ici N a la signification suivante :

$$(68) \quad N = m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3.$$

L'équation (67) a les racines suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 4 M, \\ \sigma_2 &= 2 M + 2 \sqrt{M^2 - 3 N}, \\ \sigma_3 &= 2 M - 2 \sqrt{M^2 - 3 N}, \\ \sigma_4 &= 0, \end{aligned}$$

et les valeurs correspondantes de s sont :

$$\begin{aligned} s_1 &= 2 M, \\ s_2 &= \frac{1}{2} M + \frac{3}{2} \sqrt{M^2 - 3 N}, \\ s_3 &= \frac{1}{2} M - \frac{3}{2} \sqrt{M^2 - 3 N}, \\ s_4 &= -M. \end{aligned}$$

Les exposants μ_i sont les plus grandes racines des équations (64). Introduisons, pour abréger, la notation

$$(69) \quad \alpha = \frac{12 \sqrt{M^2 - 3 N}}{M}.$$

Les exposants μ_i seront alors :

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = 2, \\ \mu_2 = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{13 + \alpha}), \\ \mu_3 = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{13 - \alpha}), \\ \mu_4 = 0. \end{array} \right.$$

α est une fonction des rapports des masses. En tenant compte de (68), on tire de (69)

$$(71) \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{12}{M} \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - m_1 m_2 - m_1 m_3 - m_2 m_3}, \\ &= \frac{6}{M} \sqrt{2(m_1 - m_2)^2 + 2(m_1 - m_3)^2 + 2(m_2 - m_3)^2}. \end{aligned}$$

Le minimum de α est

$$\alpha = 0,$$

correspondant au cas où les trois masses sont égales entre elles. Le maximum est

$$\alpha = 12,$$

et ce cas est réalisé, si deux masses sont égales à zéro.

Dans le premier cas extrême, on a

$$\mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{13});$$

dans le deuxième cas, on a

$$\mu_1 = \mu_2, \mu_3 = \mu_4.$$

En tout autre cas, les inégalités

$$\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \mu_4$$

auront toujours lieu. On a de plus, si deux des masses ne sont pas nulles

$$\mu_2 + \mu_3 > \mu_1.$$

Substituons en effet les valeurs des exposants; nous aurons à vérifier l'inégalité

$$\sqrt{13 + \alpha} + \sqrt{13 - \alpha} - 6 > 0$$

$$\text{pour } 0 \leq \alpha < 12.$$

La dérivée du membre gauche par rapport à α est

$$\frac{1}{2\sqrt{13 + \alpha}} - \frac{1}{2\sqrt{13 - \alpha}}.$$

Cette dérivée est toujours négative pour les valeurs en question de α , excepté pour $\alpha = 0$. Le membre gauche croît donc, si α décroît. Or, pour $\alpha = 12$, le membre gauche est égal à zéro; il doit donc être positif pour $\alpha < 12$.

La réduction faite, nous aurons au lieu de $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ quatre variables v_1, v_2, v_3, v_4 qui en sont des combinaisons linéaires, et ces variables seront exprimées par des

séries de la forme (33). Revenant aux variables $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3$, nous voyons qu'elles sont des séries de puissances des trois arguments

$$\tau^{\mu_1}, \tau^{\mu_2}, \tau^{\mu_3},$$

où μ_1, μ_2 et μ_3 sont donnés par (70). Pourtant, cela est vrai seulement dans la supposition qu'il n'existe pas de relations telles que (37) entre μ_1, μ_2 et μ_3 . Les seules relations possibles de cette espèce sont

$$(72) \quad \mu_1 = q \mu_3, \quad q \geq 2,$$

$$(72a) \quad \mu_2 = r \mu_3, \quad r \geq 2,$$

où q et r sont des nombres entiers. La relation

$$\mu_1 = \mu_2 + s \mu_3 \quad s \geq 1$$

qu'on aurait pu supposer possible aussi, ne peut pas se présenter, si deux des masses ne sont pas égales à zéro. En effet puisque nous avons

$$\mu_1 < \mu_2 + \mu_3,$$

nous avons *a fortiori*

$$\mu_1 < \mu_2 + s \mu_3, \quad s \geq 1.$$

La résolution par rapport à α des équations (72), (72a) donne

$$(73) \quad \alpha = 12 - \frac{8}{q} - \frac{16}{q^2},$$

$$(73a) \quad \alpha = \frac{(r^2-1)(12r^2+2r+12) - 2r(r-1)\sqrt{25r^2+2r+25}}{(r^2+1)^2}.$$

Les équations (72) et (72a) ne peuvent jamais être vérifiées en même temps. Si l'on prend la différence entre elles, on en obtient en effet l'équation

$$\mu_1 = \mu_2 + (r-q) \mu_3.$$

et cette équation est impossible, à moins que deux masses ne disparaissent.

Si une des relations (72), (72a) est vérifiée, la solution est possible à l'aide de logarithmes. Mais de même que dans le cas de la ligne droite, il peut arriver que les logarithmes ne s'introduisent pas. Pour savoir comment il en est, il faudrait examiner les termes d'ordre supérieur dans les équations (28). Cet examen peut être assez difficile, surtout si la valeur de p ou q est très grande.

IV.

Passons au cas où le nombre des corps est supérieur à trois. Sans résoudre les équations j'examinerai cependant quelles conclusions générales on peut tirer au sujet des exposants μ_i .

La réduction pour le centre de gravité faite, le problème a $3n-3$ degrés de liberté. Les exposants μ_i sont donc en nombre de $3n-3$, et les s_i correspondants se déterminent par une équation du degré $3n-3$. Mais on connaît d'avance

les valeurs de quelques-uns des u_i . D'abord il doit y avoir autant d'exposants nuls que la solution exacte contient de constantes arbitraires. Je dis de plus qu'il y a toujours un exposant égal à 2. Il y a en effet toujours une solution développable selon les puissances croissantes de $(t_1 - t)^2$. Dans cette solution, les coordonnées des n corps gardent toujours des rapports constants. Je vais le montrer.

Si les coordonnées ont des rapports constants, nous pouvons écrire

$$y_i = b_i u, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où les constantes a_i, b_i, c_i ont les mêmes valeurs que dans les formules (4). Pour la détermination de u nous avons par exemple

$$m_i a_i \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial V}{\partial a_i}$$

Mais pour a_i nous avons

$$-2k^2 m_i a_i = \frac{\partial V}{\partial a_i}.$$

Donc

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{2k^2}{u^3}.$$

Multiplions par $2 \frac{du}{dt}$ et intégrons: il vient

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 = \frac{4k^2}{u} + 4k^2 C,$$

$4k^2 C$ désignant la constante d'intégration. On tire de là

$$\frac{\sqrt{u} du}{\sqrt{1 - Cu}} = 2k^2 dt.$$

Nous supposons que le signe double soit renfermé dans la constante k . Pour u assez petit, le membre gauche se laisse développer en série:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - Cu}} = 1 + \frac{1}{2} Cu + \dots$$

Donc

$$\sqrt{u} \left(1 + \frac{1}{2} Cu + \dots \right) = 2k^2 dt$$

et en intégrant:

$$\frac{1}{5} u^{5/2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} C u^{5/2} + \dots = k(t - t_1).$$

L'inversion de cette série nous donne u développé suivant les puissances croissantes de $(3k^2(t - t_1)^2)^{1/5} = \tau^2$. L'exposant $\frac{1}{5} = 2$ doit donc toujours se présenter.

Nous connaissons donc un certain nombre des racines de l'équation en s , ce qui nous permet d'en réduire le degré d'autant d'unités. D'abord, si le mouvement a lieu dans l'espace, l'orientation de la solution exacte est déterminée par trois constantes arbitraires. Il doit donc y avoir trois exposants nuls. De plus nous avons l'exposant égal à deux, de sorte que nous connaissons en somme quatre racines de l'équation en s . Son degré peut par conséquent être réduit de quatre unités, et il restera une équation du degré $3n-7$ à résoudre. Pour le problème des quatre corps, ce nombre est égal à cinq.

Si dans la solution exacte le mouvement a lieu dans un plan, le problème se simplifie. Si nous prenons alors le plan de la solution exacte pour le plan des x, y , toutes les dérivées partielles de la forme $\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial c_j}$ ou $\frac{\partial^3 V}{\partial b_i \partial c_j}$ disparaîtront. Les variables ξ_i sont déjà séparées des autres variables, et l'équation en s se décomposera en deux: une équation du degré $2n-2$ pour la réduction des ξ_i , η_i , et une équation du degré $n-1$ pour la réduction des ζ_i . La solution exacte dépend toujours de trois constantes arbitraires, et ici encore nous avons donc trois exposants nuls. De ces exposants, un doit appartenir aux variables ξ_i , η_i . En effet, même si nous considérons le mouvement dans un plan, la solution exacte dépend d'une constante arbitraire. Les deux autres exposants nuls appartiennent aux variables ζ_i .

De plus nous avons l'exposant égal à 2. S'il n'y a que cet exposant dans la solution, les coordonnées ont des rapports constants. Mais alors le mouvement a lieu dans un plan. Cet exposant doit donc appartenir aux variables ξ_i , η_i .

En somme nous connaissons quatre racines des équations en s . De ces quatre racines, deux doivent appartenir à la première équation, celle qui sert à réduire les variables ξ_i , η_i à la forme normale. Ce sont les s_i correspondant au μ égal à 2 et à un des μ nuls. Les deux autres racines connues appartiennent à la deuxième équation en s . La connaissance de ces racines nous permet de réduire de deux unités le degré de chacune des deux équations. La détermination des exposants encore inconnus dépendra enfin de la résolution de deux équations: une du degré $2n-4$ et une du degré $n-3$.

Si le mouvement exact a lieu en ligne droite, nous prenons cette ligne pour l'axe des x . Alors toutes les dérivées partielles de la forme $\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial b_j}$, $\frac{\partial^3 V}{\partial a_i \partial c_j}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial c_j}$ disparaissent. Les équations différentielles se décomposent par conséquent en trois groupes. Les équations du premier groupe ne contiennent que les variables ξ_i dans leurs parties linéaires, celles du deuxième groupe ne contiennent que les η_i , et celles du troisième groupe ne contiennent que les ζ_i . L'équation en s se décompose par suite en trois équations, chacune du degré $n-1$: une pour les variables ξ_i , une pour les η_i et une pour les ζ_i .

De ces trois équations, nous connaissons trois racines. Ce sont la racine correspondant à l'exposant 2 et les racines correspondant aux exposants nuls. Ceux-ci sont ici au nombre de deux, car la position de la ligne droite ne dépend que de deux quantités arbitraires. L'exposant $\mu = 2$ appartient aux variables ξ_i . Si cet exposant seul se présente dans la solution, les coordonnées gardent en effet des rapports constants, et alors le mouvement a lieu en ligne droite. A ce μ correspond un s égal à $4k^2$. Cette valeur doit donc être une racine de la première équation en s , et nous pouvons en réduire le degré à $n-2$.

Je dis que si nous connaissons les racines $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ de la première équation en s , nous aurons immédiatement les racines $s_n, s_{n+1}, \dots, s_{3n-3}$ des deux autres équations par les relations

$$s_{3i-2} = s_{3i-1} = \frac{1}{2} s_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

Pour le prouver, il suffit de démontrer que les éléments du deuxième et du troisième déterminant sont la moitié des éléments du premier déterminant avec le signe renversé.

Les éléments du déterminant qui constitue la première équation en s sont des combinaisons linéaires des dérivées de la forme $\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a_j}$, tandis que les éléments du deuxième et du troisième déterminant sont les combinaisons correspondantes des dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial b_j}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial c_i \partial c_j}$ respectivement. Or nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial a_i^2} &= \sum_k \left(\frac{3(a_i - a_k)^2}{d_{ik}^5} - \frac{1}{d_{ik}^3} \right) m_i m_k, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a_j} &= \left(\frac{1}{d_{ij}^3} - \frac{3(a_i - a_j)^2}{d_{ij}^5} \right) m_i m_j. \end{aligned}$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs de $k < n$, sauf $k = i$. Pour les dérivées par rapport aux b_i et aux c_i nous avons des expressions analogues. Substituons ici

$$a_i - a_j = \pm d_{ij}, \quad b_i - b_j = c_i - c_j = 0.$$

Nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial a_i^2} &= - \frac{2 m_i m_k}{d_{ik}^3}, & \frac{\partial^2 V}{\partial b_i^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial c_i^2} = \sum_k \frac{m_i m_k}{d_{ik}^3}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a_j} &= - \frac{2 m_i m_j}{d_{ij}^3}, & \frac{\partial^2 V}{\partial b_j \partial b_j} &= \frac{\partial^2 V}{\partial c_i \partial c_j} = \frac{m_i m_j}{d_{ij}^3}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$- \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial b_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial c_i \partial c_j},$$

ce qui est exact même pour $i = j$. Notre assertion est donc démontrée.

A la racine $s = 4k^2$ de la première équation correspondent les racines $s = -2k^2$ de la deuxième et de la troisième équation. $s = -2k^2$ donne $\mu = 0$. Nous retrouvons ainsi les deux exposants nuls.

La détermination des exposants μ_i dépend donc de la résolution d'une seule équation du degré $n - 2$. Pour le problème des quatre corps ce nombre est égal à deux, et l'équation est donc résoluble. Mais les expressions des exposants sont tout de même d'une nature très compliquée. Ils dépendent en effet des quantités χ et ψ qui sont les racines des équations (21), et ces équations sont assez compliquées.

V.

Les singularités du problème des n corps que nous venons d'étudier, sont en somme caractérisées par les faits suivants:

Au moment $t = t_0$ les n corps se rencontrent tous à l'origine des coordonnées;

Les rapports des coordonnées des n corps tendent vers des limites fixes, lorsque t tend vers t_0 ;

Abstraction faite de certains cas exceptionnels, les coordonnées des n corps sont développables selon les puissances croissantes des p arguments:

$$(t_0 - t)^{\frac{\mu_1}{3}}, (t_0 - t)^{\frac{\mu_2}{3}}, \dots (t_0 - t)^{\frac{\mu_p}{3}}.$$

Les exposants $\frac{\mu_1}{3}, \frac{\mu_2}{3}, \dots, \frac{\mu_p}{3}$ sont des quantités réelles et positives. Leur nombre p est au plus égal à $3n - 6$, excepté dans le cas où les n corps se rangent en ligne droite; alors leur nombre est au plus égal à $3n - 5$. Un des μ_i doit toujours être égal à 2.

Tous les développements sont multipliés par $(t_0 - t)^{2/3}$.

Pour le problème des trois corps, il y a deux cas à distinguer:

Premier cas: Le mouvement a lieu en ligne droite. Si m_2 est la masse qui occupe la place moyenne, le rapport des distances $m_1 m_2$ et $m_2 m_3$ tend vers χ , où χ est la racine positive de

$$(m_2 + m_3) \chi^5 + (2m_2 + 3m_3) \chi^4 + (m_2 + 3m_3) \chi^3 - \\ - (3m_1 + m_2) \chi^2 - (3m_1 + 2m_2) \chi - (m_1 + m_2) = 0.$$

Les coordonnées sont développables selon les puissances croissantes de

$$(t_0 - t)^{\frac{2}{3}}, (t_0 - t)^{\frac{1}{3}} (-1 + \sqrt{25 + 16\beta}).$$

β est donné par

$$\beta = \frac{m_3 \chi^4 + 3m_3 \chi^3 + 3(m_1 + m_3) \chi^2 + 3m_1 \chi + m_1}{m_2 \chi^4 + 2m_2 \chi^3 + (m_1 + 2m_2 + m_3) \chi^2 + 2m_2 \chi + m_2}.$$

Deuxième cas: Le mouvement a lieu dans un plan fixe. Les trois corps se rangent de plus en plus en triangle équilatéral. Les coordonnées sont développables selon les puissances de

$$(t_0 - t)^{\frac{2}{3}}, (t_0 - t)^{\frac{1}{3}}(-1 + \sqrt{13 + \alpha}), (t_0 - t)^{\frac{1}{3}}(-1 + \sqrt{13 - \alpha}),$$

où

$$\alpha = \frac{6\sqrt{2}}{m_1 + m_2 + m_3} V(m_1 - m_2)^2 + (m_1 - m_3)^2 + (m_2 - m_3)^2.$$

Il y a les cas exceptionnels suivants:

$$\beta = p^2 + \frac{p}{2} - \frac{3}{2}$$

dans le premier cas, et

$$\alpha = 12 - \frac{8}{q} - \frac{16}{q^2},$$

$$\alpha = \frac{(r^2 - 1)(12r^2 + 2r + 12) - 2r(r - 1)\sqrt{25r^2 + 2r + 25}}{(r^2 + 1)^2}$$

dans le second. Ici p , q et r signifient des nombres entiers positifs au moins égaux à deux. Ces relations reviennent évidemment à des relations homogènes entre les masses.

Les solutions du problème des n corps que nous avons trouvées, sont naturellement des cas d'exception. Pour que tous les n corps se rencontrent au même point, il faut en effet qu'un certain nombre de conditions soient remplies. Il importe donc d'examiner le nombre des constantes d'intégration qui entrent dans nos solutions. Les intégrales du problème général contiennent $6n - 6$ constantes. (Nous supposons que la réduction pour le centre de gravité est faite.)

Quelles sont les constantes arbitraires dans nos solutions?

Une première constante arbitraire est le moment t_0 de la collision. La solution exacte dont s'approche notre solution contient de plus un nombre q de constantes; q est égal à deux ou à trois. Enfin il y a les constantes A_i qui sont multipliées par τ^{μ_i} . Leur nombre est égal au nombre p des exposants positifs μ_i , et ce nombre ne peut jamais excéder $3n - 3 - q$. Nous avons donc au maximum un nombre de constantes égal à

$$1 + q + 3n - 3 - q = 3n - 2.$$

Nos solutions sont par conséquent des cas d'exception d'ordre $3n - 4$ au moins.

Dans le problème des trois corps, le nombre p des exposants positifs est égal à 2 dans le premier cas et à 3 dans le second. Le nombre des constantes d'intégration dans la solution exacte est aussi égal à 2 dans le premier cas et à 3 dans le second. Avec la constante arbitraire t_0 , cela fait un nombre total de *cinq* constantes dans le premier cas et de *sept* dans le deuxième. Le premier cas exige donc que *sept* conditions soient remplies, tandis que le deuxième cas en exige *cinq*.

Dans le premier cas, le mouvement a lieu en ligne droite. Si nous prenons comme point de départ le problème des trois corps en ligne droite, la solution générale contient 4 constantes, et notre solution en contient 3. Dans ce cas, la solution exacte ne contient en effet pas de constante arbitraire. Si nous avons affaire au problème des trois corps en ligne droite, la collision de tous les trois corps au même moment est par suite un cas d'exception *simple*.

Dans le cas du triangle équilatéral, le mouvement a lieu dans un plan. Considérons le problème général en deux dimensions; il renferme 8 constantes. Notre solution en contient 5, puisque la solution exacte dans un plan ne contient qu'une constante. Ce cas est donc un cas d'exception *triple*.

Au sujet des constantes d'intégration, voici une proposition qui est exacte au moins pour le problème des trois corps:

La constante C des forces vives est égale à un nombre fixe multiplié par la constante A_1 qui appartient à l'exposant $\mu = 2$.

Considérons en effet l'intégrale des forces vives:

$$\frac{1}{2} \sum m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right] - \sum' \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = C.$$

Substituons ici les séries pour x_i , y_i , z_i et r_{ij} :

$$\begin{aligned} x_i &= a_i \tau^2 + \alpha_i^{(1)} A_1 \tau^{2+\mu_1} + \alpha_i^{(2)} A_2 \tau^{2+\mu_2} + \dots, \\ y_i &= b_i \tau^2 + \beta_i^{(1)} A_1 \tau^{2+\mu_1} + \beta_i^{(2)} A_2 \tau^{2+\mu_2} + \dots, \\ z_i &= c_i \tau^2 + \gamma_i^{(1)} A_1 \tau^{2+\mu_1} + \gamma_i^{(2)} A_2 \tau^{2+\mu_2} + \dots, \\ r_{ij} &= d_{ij} \tau^2 + \delta_{ij}^{(1)} A_1 \tau^{2+\mu_1} + \delta_{ij}^{(2)} A_2 \tau^{2+\mu_2} + \dots \end{aligned}$$

Rappelons-nous l'expression (8) de $\frac{d\tau}{dt}$; nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 = \\ &= \frac{k^2}{\tau^4} \left[4(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2) \tau^2 + 4(2 + \mu_1)(a_i \alpha_i^{(1)} + b_i \beta_i^{(1)} + c_i \gamma_i^{(1)}) A_1 \tau^{2+\mu_1} + \dots \right] \\ & \frac{1}{r_{ij}} = \frac{1}{\tau^2 d_{ij}} \left[1 - \frac{\delta_{ij}^{(1)}}{d_{ij}} A_1 \tau^{\mu_1} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Or nous avons $\mu_1 = 2$, tandis que les autres exposants sont en général irrationnels. La partie constante de l'expression

$$\frac{1}{2} \sum m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right] - \sum' \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

est donc

$$(74) \quad \left[8k^2 \sum m_i (a_i \alpha_i^{(1)} + b_i \beta_i^{(1)} + c_i \gamma_i^{(1)}) + \sum' \frac{m_i m_j \delta_{ij}^{(1)}}{d_{ij}^2} \right] A_1 = C.$$

Nous pouvons simplifier le coefficient de A_1 . Remarquons en effet que si toutes les constantes A_i sont nulles, sauf A_1 , il n'y a que des puissances de τ^2 dans la solution. Les coordonnées doivent alors garder des rapports constants, ce qui exige

$$\alpha_i^{(1)} = \lambda a_i, \beta_i^{(1)} = \lambda b_i, \gamma_i^{(1)} = \lambda c_i, \delta_{ij}^{(1)} = \lambda d_{ij}.$$

L'expression (74) devient donc

$$C = \left[8 k^2 \sum m_i (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2) + \sum' \frac{m_i m_j}{d_{ij}} \right] \lambda A_1,$$

et en se rappelant l'expression (6a) de k on obtient enfin

$$(74a) \quad C = 5 \sum' \frac{m_i m_j}{d_{ij}} \lambda A_1.$$

Pour étendre cette relation au cas de n corps, il faudrait prouver qu'il n'y a pas d'autres exposants de la forme $\frac{2}{q}$, où q est un entier. C'est pourquoi nous devons aussi excepter, dans le problème des trois corps, le cas où la relation (72) a lieu.

Une autre proposition qui est au contraire toujours vraie, quel que soit le nombre des corps, est celle-ci:

Les constantes des aires sont toutes égales à zéro.

C'est ce qu'on constate sans peine en substituant les expressions des coordonnées dans les intégrales des aires et en y faisant $\tau = 0$.

VI.

On se rappelle que nous avons dû faire une supposition relative aux rapports des coordonnées, lorsque t tend vers t_0 , le moment de la collision. En ce qui concerne le problème des trois corps, cette supposition est en partie justifiée par les résultats de M. SUNDMAN dans le travail cité page 1. Or je veux montrer en quelques mots comment le procédé employé par lui peut être étendu au cas où le nombre des corps est supérieur à trois. Ma première tâche sera donc de déduire, pour le cas général de n corps, des formules analogues aux formules (34), (42) et (43) dans le mémoire de M. SUNDMAN.

Désignons par MR^2 la somme

$$(75) \quad MR^2 = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} m_i m_j r_{ij}^2 = \sum' m_i m_j r_{ij}^2.$$

Introduisons ici l'expression de r_{ij}^2 ; nous aurons

$$MR^2 = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} m_i m_j (x_i^2 + x_j^2 + y_i^2 + y_j^2 + z_i^2 + z_j^2 - 2(x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j)).$$

Or le terme sous les signes de sommation ne change pas, si l'on permute i avec j , et il disparaît pour $i=j$. On peut donc écrire

$$M R^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j (x_j^2 + y_j^2 + z_j^2) - \\ - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j (x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j).$$

Effectuons la sommation par rapport à j dans la première somme: elle devient égale à

$$\frac{1}{2} M \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$

Pour la deuxième somme, nous trouvons la même valeur.

La troisième somme est égale à zéro, à cause des équations (3).

Nous obtenons donc pour R^2 l'expression suivante:

$$(76) \quad R^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$

Différentions cette équation deux fois: nous aurons¹⁾

$$\frac{d^2 R^2}{dt^2} = \sum_{i=1}^n 2 m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) + \sum_{i=1}^n 2 m_i (x_i x_i'' + y_i y_i'' + z_i z_i'').$$

D'après l'intégrale des forces vives, la première somme est égale à

$$4 U' + 4 C.$$

Pour évaluer la deuxième somme, nous faisons d'abord usage des équations (1).

La somme se transforme alors en

$$\sum_{i=1}^n 2 \left(x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial U}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial U}{\partial z_i} \right).$$

Or U est une fonction homogène du degré -1 par rapport aux coordonnées.

On a donc en vertu d'un théorème bien connu

$$\sum_{i=1}^n \left(x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial U}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial U}{\partial z_i} \right) = -U.$$

Nous avons par conséquent

$$\frac{d^2 R^2}{dt^2} = 2 U + 4 C.$$

Posons

$$2 C = -K;$$

nous aurons

$$(77) \quad \frac{d^2 R^2}{dt^2} = 2(U - K).$$

C'est là une équation qui correspond tout à fait à l'équation (34) de M. SUNDMAN.

¹⁾ Nous désignons par des accents les dérivations par rapport à t .

Dans ce qui va suivre, je vais poser, pour abrégé,

$$x_i - x_j = x_{ij}, \quad y_i - y_j = y_{ij}, \quad z_i - z_j = z_{ij}.$$

x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} sont donc les coordonnées de la masse m_i par rapport à la masse m_j .

Considérons maintenant la relation

$$r_{ij}^2 = x_{ij}^2 + y_{ij}^2 + z_{ij}^2.$$

En dérivant cette égalité nous obtenons, si nous omettons pour un moment les indices,

$$rr' = xx' + yy' + zz',$$

et en élevant au carré

$$r^2 r'^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) = (x^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2)^2 + (x'^2 - x^2 - y'^2 - z'^2)^2 + (x'^2 - x^2 - y'^2 - z'^2)^2.$$

Divisons par r^2 et introduisons les notations

$$U_{ij} = y_{ij} z'_{ij} - z_{ij} y'_{ij},$$

$$V_{ij} = z_{ij} x'_{ij} - x_{ij} z'_{ij},$$

$$W_{ij} = x_{ij} y'_{ij} - y_{ij} x'_{ij};$$

$$Q_{ij}^2 = U_{ij}^2 + V_{ij}^2 + W_{ij}^2.$$

Nous obtenons

$$r'^2 = r^2 - \frac{U_{ij}^2 + V_{ij}^2 + W_{ij}^2}{r^2} = \frac{Q_{ij}^2}{r^2}.$$

Employons maintenant le même procédé à l'égard

$$MR' = -m_i m_j r_{ij}.$$

Une dérivation nous donne

$$MR R' = \sum_i m_i m_j r_{ij} r'_{ij},$$

et en élevant au carré, puis ordonnant convenablement les termes, nous obtenons

$$M^2 R^2 R'^2 = \sum_i m_i m_l r_{il}^2 \cdot \sum_j m_i m_j r_{ij}^2 - \sum_i m_i m_j m_l m_l (r_{ij} r'_{kl} - r_{kl} r'_{ij})^2.$$

La dernière somme doit comprendre toutes les combinaisons essentiellement distinctes des quatre indices i, j, k, l prises chacune une seule fois.

Si nous introduisons la notation

$$T_{ij,kl}^2 = \frac{m_i m_j m_l m_l}{M} (r_{ij} r'_{kl} - r_{kl} r'_{ij})^2,$$

nous aurons

$$R'^2 = \frac{1}{M} \sum_i m_i m_j r_{ij}^2 - \frac{1}{MR^2} \sum T_{ij,kl}^2,$$

et en introduisant la valeur de r_{ij}^2 ,

$$\begin{aligned}
R'^2 &= \frac{1}{M} \sum' m_i m_j (x'_{ij}{}^2 + y'_{ij}{}^2 + z'_{ij}{}^2) - \frac{1}{M} \sum' \frac{Q_{ij}^2}{r_{ij}^2} - \frac{1}{M} \sum' \frac{T_{ij,kl}^2}{R^2} \\
&= \frac{1}{M} \sum' m_i m_j (x'_{ij}{}^2 + y'_{ij}{}^2 + z'_{ij}{}^2) - P,
\end{aligned}$$

en désignant par P la somme positive ou nulle

$$P = \frac{1}{M} \sum' \frac{Q_{ij}^2}{r_{ij}^2} + \frac{1}{M} \sum' \frac{T_{ij,kl}^2}{R^2}.$$

Considérons la somme

$$\sum' m_i m_j (x'_{ij}{}^2 + y'_{ij}{}^2 + z'_{ij}{}^2).$$

Cette somme peut se transformer de la même manière que l'expression (75) de MR^2 . On obtient alors

$$\sum' m_i m_j (x'_{ij}{}^2 + y'_{ij}{}^2 + z'_{ij}{}^2) = M \sum'_{i=1}^n m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = M(2U - K).$$

Nous avons donc enfin

$$(78) \quad \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + K = 2U - P,$$

et cette équation correspond tout à fait à l'équation (42) de M. SUNDMAN.

L'élimination de U dans (77) et (78) donne

$$(79) \quad 2R \frac{d^2 R}{dt^2} + \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + K = P.$$

correspondant à l'équation (43) de M. SUNDMAN.

Les formules (34), (42) et (43) de M. SUNDMAN sont le point de départ de sa déduction. Nos formules (77), (78) et (79) sont identiques à ses formules, excepté que les lettres y ont une signification légèrement différente. Les raisonnements et démonstrations pages 10—15 dans le mémoire de M. SUNDMAN subsistent donc avec de légères modifications même dans notre cas. Je citerai ici les points principaux de ces démonstrations tout en renvoyant le lecteur au mémoire cité, où il trouvera l'exposition complète de la déduction.

Si tous les n corps se rencontrent à l'instant $t = t_0$, on a

$$\lim_{t=t_0} U = +\infty, \quad \lim_{t=t_0} R = 0.$$

Pour de petites valeurs de $t_0 - t$, R doit par suite constamment décroître, et $\frac{dR}{dt}$ est par conséquent constamment négatif. Il s'ensuit qu'on peut introduire, pour des valeurs assez petites de $t_0 - t$, R comme variable indépendante au lieu de t .

Posons

$$(80) \quad \alpha = R \left[\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + K \right].$$

L'équation (79) nous donne alors

$$(81) \quad \frac{d\alpha}{dt} = P \frac{dR}{dt}.$$

$\frac{d\alpha}{dt}$ est donc toujours négatif ou nul (on se rappelle que P est une quantité positive ou nulle), et α décroît donc, lorsque t croît. L'expression (80) montre d'autre part que α est positif ou nul pour $t = t_0$. La quantité α doit donc avoir une limite finie pour $t = t_0$:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha = A > 0.$$

L'intégration de (81) donne, si l'on y introduit R comme variable indépendante

$$(82) \quad \alpha = A + \int_0^R P dR,$$

tandis que (78) et (80) donnent

$$\alpha = 2 R U - P R.$$

On a donc

$$(83) \quad 2 R U = A + P R + \int_0^R P dR.$$

L'équation (77) multipliée par $\frac{dR^2}{dt}$ et intégrée donne d'autre part

$$(84) \quad R \alpha = \int_0^R 2 R U dR.$$

En combinant cette équation avec l'équation (82), on obtient

$$(85) \quad A + \int_0^R P dR = \frac{1}{R} \int_0^R 2 R U dR.$$

La fonction $2 R U$ est certainement différente de zéro. R est en effet du même ordre de grandeur que la plus grande des distances r_{ij} , tandis que U est du même ordre que la valeur inverse de la plus petite distance. Leur produit peut donc être fini ou infiniment grand, mais il ne peut jamais devenir infiniment petit. On a donc certainement

$$2 R U > 0.$$

L'équation (85) nous donne alors, en y faisant tendre R vers zéro,

$$A > 0.$$

Enfin l'équation (83) nous donne

$$2 R U \geq A.$$

L'égalité (85) nous apprend que la valeur moyenne de $2 R U$ entre 0 et R_1 tend vers A lorsque R_1 tend vers zéro. On en conclut

$$(86) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} 2 R U = A,$$

si $2RU$ ne devient pas indéterminé pour $t=t_0$. Or un raisonnement presque identique à celui de M. SUNDMAN (pages 13—15) nous montre qu'il n'en est pas ainsi et que l'égalité (86) a toujours lieu. Je crois inutile de citer ici la démonstration puisqu'il n'y a que des changements évidents à faire dans la déduction citée.

L'égalité (86) nous dit d'abord que toutes les distances r_{ij} sont du même ordre de grandeur.

Si nous désignons par ε toute fonction qui tend vers zéro avec R , nous avons

$$(87) \quad 2RU = A + \varepsilon,$$

et en introduisant cette égalité dans la formule (83), on trouve que PR est de la forme

$$(88) \quad PR = \varepsilon.$$

Or P est la somme d'un certain nombre de carrés; ces carrés sont par conséquent tous de la forme $\frac{\varepsilon}{R}$. On trouve de cette manière

$$(89) \quad r_{ij} \frac{dr_{kl}}{dt} - r_{kl} \frac{dr_{ij}}{dt} = \varepsilon VR;$$

et en se rappelant que r_{ij} est du même ordre de grandeur que R ,

$$(90) \quad \begin{cases} y_{ij} \frac{dz_{ij}}{dt} - z_{ij} \frac{dy_{ij}}{dt} = \varepsilon VR, \\ z_{ij} \frac{dx_{ij}}{dt} - x_{ij} \frac{dz_{ij}}{dt} = \varepsilon VR, \\ x_{ij} \frac{dy_{ij}}{dt} - y_{ij} \frac{dx_{ij}}{dt} = \varepsilon VR, \end{cases}$$

Comparons la première des équations (90) à la formule

$$(91) \quad \frac{d}{dt} \left(y_{ij} \frac{dz_{ij}}{dt} - z_{ij} \frac{dy_{ij}}{dt} \right) = \frac{1}{m_i} \left(y_{ij} \frac{\partial U}{\partial z_i} - z_{ij} \frac{\partial U}{\partial y_i} \right) - \frac{1}{m_j} \left(y_{ij} \frac{\partial U}{\partial z_j} - z_{ij} \frac{\partial U}{\partial y_j} \right)$$

qu'on déduit des équations (1). Introduisons ici R comme variable indépendante au moyen de la relation

$$\frac{dR}{dt} = - \frac{VA + \varepsilon}{VR}$$

qu'on déduit de (80), (82) et (88). Nous aurons

$$(92) \quad \frac{d}{dR} \left(y_{ij} \frac{dz_{ij}}{dt} - z_{ij} \frac{dy_{ij}}{dt} \right) = - \frac{VR}{VA + \varepsilon} \left[\frac{1}{m_i} \left(y_{ij} \frac{\partial U}{\partial z_i} - z_{ij} \frac{\partial U}{\partial y_i} \right) - \frac{1}{m_j} \left(y_{ij} \frac{\partial U}{\partial z_j} - z_{ij} \frac{\partial U}{\partial y_j} \right) \right].$$

Intégrée et comparée à la première formule (90), cette équation donne¹⁾

$$\frac{R}{m_i} \left(y_{ij} \frac{\partial U}{\partial z_i} - z_{ij} \frac{\partial U}{\partial y_i} \right) - \frac{R}{m_j} \left(y_{ij} \frac{\partial U}{\partial z_j} - z_{ij} \frac{\partial U}{\partial y_j} \right) = \varepsilon.$$

¹⁾ Pour une déduction tout à fait rigoureuse, je renvoie aux pages 19—21 du mémoire de M. SUNDMAN.

Calculons la valeur du membre gauche et introduisons les notations

$$(93) \quad \xi_{ij} = \frac{x_{ij}}{R}, \quad \eta_{ij} = \frac{y_{ij}}{R}, \quad \zeta_{ij} = \frac{z_{ij}}{R}, \quad \rho_{ij} = \frac{r_{ij}}{R}. \quad (i, j = 1, 2 \dots n).$$

ξ_{ij} , η_{ij} , ζ_{ij} , ρ_{ij} seront alors des quantités finies, et quant aux quantités ρ_{ij} , nous savons aussi qu'elles sont toutes différentes de zéro. Nous obtenons

$$(94) \quad \sum_{k=1}^n m_k (\eta_{ij} \zeta_{ik} - \zeta_{ij} \eta_{ik}) \left(\frac{1}{\rho_{kj}^3} - \frac{1}{\rho_{ki}^3} \right) = \varepsilon,$$

et par un procédé analogue

$$(95) \quad \sum_{k=1}^n m_k (\zeta_{ij} \xi_{ik} - \xi_{ij} \zeta_{ik}) \left(\frac{1}{\rho_{kj}^3} - \frac{1}{\rho_{ki}^3} \right) = \varepsilon,$$

$$(96) \quad \sum_{k=1}^n m_k (\xi_{ij} \eta_{ik} - \eta_{ij} \xi_{ik}) \left(\frac{1}{\rho_{kj}^3} - \frac{1}{\rho_{ki}^3} \right) = \varepsilon. \quad (i, j = 1, 2 \dots n.)$$

Si nous remplaçons dans ces équations les membres droits par zéro, nous aurons des équations que doivent remplir les limites des ξ_{ij} , η_{ij} , ζ_{ij} , ρ_{ij} , si ces quantités ont en effet des limites.

Désignons par λa_{ij} , λb_{ij} , λc_{ij} , λd_{ij} les quantités ξ_{ij} , η_{ij} , ζ_{ij} , ρ_{ij} lorsqu'on remplace ε par zéro dans (94), (95) et (96). Les quantités a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} doivent alors satisfaire aux équations

$$(97) \quad \sum_{k=1}^n m_k (b_{ij} c_{ik} - c_{ij} b_{ik}) \left(\frac{1}{d_{kj}^3} - \frac{1}{d_{ki}^3} \right) = 0,$$

$$(98) \quad \sum_{k=1}^n m_k (c_{ij} a_{ik} - a_{ij} c_{ik}) \left(\frac{1}{d_{kj}^3} - \frac{1}{d_{ki}^3} \right) = 0,$$

$$(99) \quad \sum_{k=1}^n m_k (a_{ij} b_{ik} - b_{ij} a_{ik}) \left(\frac{1}{d_{kj}^3} - \frac{1}{d_{ki}^3} \right) = 0. \quad (i, j = 1, 2 \dots n.)$$

Or reportons-nous aux équations (12) et aux équations correspondantes en b et en c . Si l'on prend les différences de ces équations et si l'on élimine ensuite la quantité k^2 entre les équations en a et les équations correspondantes en b , on obtient précisément les équations (99). De la même manière on peut déduire les équations (97) et (98). Nous avons posé, bien entendu,

$$a_i - a_j = a_{ij}, \quad b_i - b_j = b_{ij}, \quad c_i - c_j = c_{ij}.$$

La différence principale est que, dans (12), nous avons supposé *a priori* les quantités a_i , b_i , c_i , d_{ij} constantes, tandis que dans (97), (98) et (99) ces quantités ne sont nécessairement constantes que si les équations l'exigent. Or il est évident que l'orientation par rapport aux axes des coordonnées de la figure $m_1 m_2 \dots m_n$ est arbitraire. Les quantités a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} dépendent par suite d'un certain nombre de quantités arbitraires, dont nous ne pouvons pas assurer qu'elles soient constantes. C'est pourquoi les équations (97), (98) et (99) ne nous donnent certainement pas des limites des rapports des a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , même si elles peuvent nous donner les rapports des quantités d_{ij} qui sont indépendantes de l'orientation par rapport aux axes.

Abstraction faite des modifications provoquées par ces circonstances, nous pouvons déduire par une discussion directe des équations (97), (98) et (99) les mêmes résultats généraux que nous avons obtenus des équations (12). Il est alors commode de considérer a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2 \dots n$) comme des coordonnées rectilignes de n points $P_1, P_2, \dots P_n$ dans l'espace. Si nous posons alors

$$(100) \quad b_{ij} c_{ik} - c_{ij} b_{ik} = 2 A_{ijk},$$

la quantité A_{ijk} n'est autre chose que l'aire de la projection sur le plan des bc du triangle $P_i P_j P_k$ prise avec un signe convenable. D'une manière analogue, nous posons

$$(101) \quad c_{ij} a_{ik} - a_{ij} c_{ik} = 2 B_{ijk},$$

$$(102) \quad a_{ij} b_{ik} - b_{ij} a_{ik} = 2 C_{ijk}.$$

Les quantités B_{ijk} et C_{ijk} ont des significations géométriques analogues. On vérifie aisément que

$$(103) \quad A_{ijk} = A_{kij} = A_{jki} = -A_{ikj} = -A_{kji} = -A_{jik}.$$

Pour les quantités B et C , il y a des relations analogues.

Les équations (97), (98) et (99) peuvent alors s'écrire

$$(104) \quad \sum_{k=1}^n m_k A_{ijk} \left(\frac{1}{d_{kj}^3} - \frac{1}{d_{ki}^3} \right) = 0,$$

$$(105) \quad \sum_{k=1}^n m_k B_{ijk} \left(\frac{1}{d_{ki}^3} - \frac{1}{d_{kj}^3} \right) = 0,$$

$$(106) \quad \sum_{k=1}^n m_k C_{ijk} \left(\frac{1}{d_{ki}^3} - \frac{1}{d_{kj}^3} \right) = 0. \quad (i, j = 1, 2 \dots n)$$

Considérons les équations (104) comme $\frac{n(n-1)}{2}$ équations linéaires en $A_{123}, A_{124}, \dots$. Ces quantités A_{ijk} sont en nombre de $n(n-1)(n-2)$ (tous les A_{ijk} où deux des trois indices sont égales, disparaissent), mais elles ne sont pas toutes linéairement indépendantes. D'abord il y a entre elles les relations (103) et de plus il y a d'autres relations linéaires qui ont une simple signification géométrique. La considération suivante nous donne le nombre des quantités A_{ijk} indépendantes.

Soient $P'_1, P'_2, \dots P'_n$ les projections des points $P_1, P_2, \dots P_n$. Alors $P'_1, P'_2, \dots P'_n$ forment un polygone que nous divisons en un certain nombre de triangles par des diagonales. Les diagonales du point P'_1 nous donnent $n-2$ triangles; celles du point P'_2 nous en donne aussi $n-2$, mais leur somme doit être égale à la somme des premiers; donc $n-3$ seulement en sont indépendants. Continuant de cette manière, nous trouvons un nombre égal à

$$n-2 + n-3 + n-4 + \dots + 2 + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Nous avons donc $\frac{n(n-1)}{2}$ équations linéaires et homogènes entre les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ quantités A_{ijk} . Si alors n des équations (104) ne sont pas des combinaisons linéaires des $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$ autres, ce qui exigerait la disparition de n déterminants d'ordre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, toutes les quantités A_{ijk} disparaissent.

Puisque les équations (105) et (106) ont les mêmes coefficients que (104), les quantités B_{ijk} et C_{ijk} disparaîtront aussi. La signification géométrique de ces quantités montre alors que les n points $P_1, P_2, \dots, P_n$ se trouvent en ligne droite. Les masses $m_1, m_2, \dots, m_n$ se rangent alors de plus en plus en ligne droite, mais rien ne nous assure que la position de cette ligne tende vers une limite fixe pour $t = t_0$.

Supposons maintenant que les n déterminants mentionnés tout à l'heure disparaissent tous, mais qu'il n'en est pas de même de leurs mineurs du premier ordre. Les équations (104) déterminent alors les rapports des A_{ijk} , et, de même, les équations (105) et (106) déterminent les rapports des B_{ijk} et des C_{ijk} . Puisque les coefficients sont égaux dans les trois systèmes (104), (105) et (106), les quantités B_{ijk} et C_{ijk} seront proportionnelles aux quantités correspondantes A_{ijk} . On en conclut que les points $P_1, P_2, \dots, P_n$ se trouvent dans le même plan. En ce cas, les masses $m_1, m_2, \dots, m_n$ s'approchent donc d'un plan passant par l'origine, mais il n'est pas certain que ce plan soit fixe.

Pour la détermination des rapports des quantités d_{ij} il faudrait joindre aux équations (104), (105) et (106) les équations suivantes:

$$(107) \quad 16(A_{ijk}^2 + B_{ijk}^2 + C_{ijk}^2) = (d_{ij} + d_{ik} + d_{jk})(d_{ij} + d_{ik} - d_{jk})(d_{ij}^2 + d_{jk}^2 - d_{ik}^2)(d_{ik} + d_{jk} - d_{ij}),$$

$$(i, j, k = 1, 2, \dots, n)$$

qui expriment que le carré de l'aire du triangle $P_i P_j P_k$ est égal à la somme des carrés des aires de ses projections sur les plans des coordonnées.

